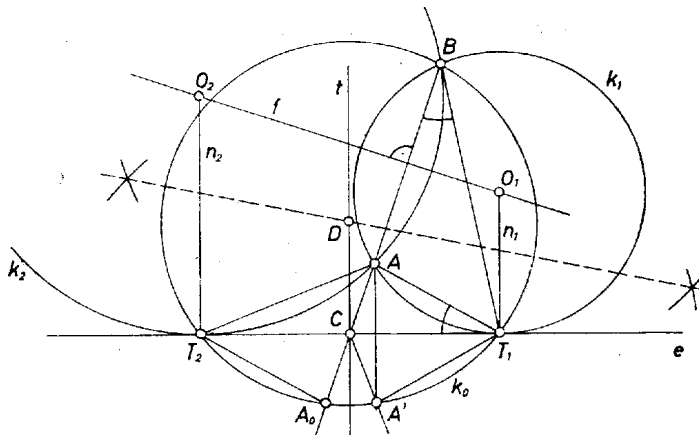


I. megoldás. Be fogjuk látni, hogy a kapott T_1, T_2 pont éppen a keresett k_1, k_2 körnek e -n levő érintési pontja. Eszerint egy lehetőség a szerkesztés befejezésére: k_i -nek ($i = 1, 2$) O_i középpontját az AB szakasz f felező merőlegeséből a T_i -ben e -re állított n_i merőleges metszi ki.



Azt bizonyítjuk, hogy az A, B, T_1 pontokon átmenő k_1^* kör érinti e -t, tehát azonos k_1 -gyel. Messe az AB (azaz CA) egyenes a D körüli, $DA' (= DB)$ sugarú k_0 segédkört a (B -től különböző) A_0 pontban. A_0 az A' -nek a $CD = t$ tengelyre vonatkozó tükörképe, mert a CA', CA egyenesek egymás tükörképei e -re, ennél fogva a C -n átmenő, e -re merőleges t -re is, t pedig másrészt k_0 -nak is szimmetriatengelye. T_1, T_2 ugyancsak tükörös pontpár t -re. Így a két tükrözés és a k_0 -beli kerületi szögek lapján

$$AT_1C \sphericalangle = AT_1T_2 \sphericalangle = A'T_1T_2 \sphericalangle = A_0T_2T_1 \sphericalangle = A_0BT_1 \sphericalangle = ABT_1 \sphericalangle,$$

ami az AT_1 íven levő kerületi szög, tehát T_1C valóban érinti k_1^* -ot. Ezt akartuk bizonyítani.

Amit T_1 -re kaptunk, T_2 -re is érvényes, hiszen az 1, 2 indexeket tetszés szerint helyezhettük el e és k_0 metszéspontjaiban.

Hasonlóan az A, B jelölések is felcserélhetők volnának. Ha A' helyett B -nek e -re vonatkozó B' képén át szerkesztenők a segédkört (természetesen AB' felező merőlegesével metszve t -t), k_0 -nak e -re vonatkozó tükörképét kapnánk meg, és ez ugyanazokat a T_1, T_2 pontokat metszi ki e -ből.

A szerkesztés a feltevés szerint mindig végrehajtható, C és A' , valamint k_0 és T_1, T_2 létrejönnek, mert A' és B a k_0 -nak e két oldalán levő pontjai. Amennyiben pl. A rajta van e -n, akkor C és A' azonos vele, k_0 azonnal a keresett kört adja, ekkor egyetlen megoldás van.

Megjegyzés. A szerkesztés érdekessége, hogy hasonlóság felhasználása nélkül – más szóval kizárólag középiskolai I. osztályos ismeretek alapján – jut célba.

II. megoldás. Megmutatjuk, hogy az A -n átmenő és e -t T_1 -ben érintő k_1^{**} kör átmegy B -n is, tehát azonos k_1 -gyel. Messe az AB egyenes k_1^{**} -ot B^{**} -ban. k_1^{**} -nak a CA egyenes szelője, CT_1 pedig érintője, ezért a szelő- és érintőszakaszok tétele szerint

$$CB^{**} = \frac{CT_1^2}{CA}.$$

Másrészt A_0B és T_1T_2 a k_0 -nak szelői, metszéspontjuk C , felezi T_1T_2 -t, így $CA_0 = CA$ alapján

$$CB = \frac{CT_1 \cdot CT_2}{CA_0} = \frac{CT_1^2}{CA},$$

tehát $CB^{**} = CB$, B^{**} azonos B -vel. Ezt akartuk bizonyítani.

Szabó György (Nyíregyháza, Vasvári P. Gimn., III. o. t.)