

a) Mivel Jóska száma 7-es számjegyre végződött, azért az 1-gyel növelt 23-szorosának végén 2-es állt, hiszen a szorzat (és összeg) utolsó számjegyét egyedül a tényezők (ill. tagok) utolsó jegyei határozzák meg, és $7 \cdot 3 + 1$ utolsó jegye 2. Ugyanígy az összeg 11-szeresében is 2-os az utolsó jegy. Továbbmenve a 23-mal képezett szorzat 6-osra, az 1-gyel nagyobb szám 7-esre végződött, és ez visszaadódott az utolsó két szorzás után is, mert a $33 \cdot 77$ szorzat utolsó jegye 1-es.

Jelöljük az utoljára kapott szorzatból az utolsó 7-es elhagyásával kapott számot A -val, jegyeinek számát k -val, ekkor a szám $10A + 7$, a 7-es előre írásával kapott szám $7 \cdot 10^k + A$, hiszen az új számból A -t levonva a 7-es után k darab 0 áll. Ezért Jóska utolsó közlése alapján

$$\frac{7 \cdot 10^k + A}{7} = 10A + 7, \quad A = \frac{7 \cdot 10^k - 49}{69}.$$

Eszerint A egy olyan osztás hányadosa, melyben az osztó 69, a maradék 49, az osztandó pedig egy 7-esből és utána k (ismeretlen) számú 0-ból áll. Fordítva: ha a $700 \dots : 69$ osztásban olyan helyen állunk meg, ahol a maradék 49, akkor a hányados alkalmas lesz az A szám céljára.

Megállva az első ilyen helyen, az alábbiakat kapjuk A -ra, majd $10A + 7$ -re, a 77-tel való szorzás előtti szorzandóra, és így tovább, a Jóska által végzett egymás utáni műveletek eredményeire, fordított sorrendben:

A		101	449	275	362	318	840	579,
$10A + 7 = B =$	1	014	492	753	623	188	405	797,
$B : 77 = C =$		13	175	230	566	534	914	361,
$C : 33 = D =$			399	249	411	107	118	617,
$(D - 1) : 23 = E =$			17	358	670	048	135	592,
$E : 11 = F =$			1	578	060	913	466	872,
$(F - 1) : 23 =$				68	611	344	063	777.

Az utolsó lehető Jóska kiindulási száma.

Megjegyezzük, hogy ha a visszafelé végzett számítássorozat nem vezetett volna minden lépésben egész számra, akkor A helyén próbálkozhattunk volna azzal a számmal is, amely a $700 \dots : 69$ osztás hányadosa akkor, amikor másodszor, 3-adszor, $\dots$, k -adszor $\dots$ lép fel maradékként 49, vagyis az $\overline{A7A}$ (43 jegyű), $\overline{A7A7A}$ (65 jegyű), $\dots$ számmal, hiszen az A szám utolsó (9-es) jegyének leírásakor maradt 49-es mellé 0-t levéve a hányados új egye 7, a maradék is 7, és innen kezdve ismétlődnek A jegyei.

b) Pista megszerzett adata akkor lett volna nélkülözhető, ha Jóska száma végére bármely J jegyet próbálva, mindig a 7-est kaptuk volna előreírandó jegyként és osztóként. Ez azonban nem áll, mert az egymás után képezett számok utolsó jegye rendre $3J$, $3J + 1$ (kétszer egymás után), $9J + 3$, $9J + 4$ és az utolsó két szorzás után ismét $9J + 4$, ill. ennek a számnak utolsó jegye. Ez $4 - J$, ill. $14 - J$ alakban is írható, eszerint minden egyes J -hez más lenne az előreteendő számjegy és osztó. Csak a $J = 4$ és $J = 3$ esettel nem kellene próbát tennünk, az előbbi 0 osztóra vezetne, az utóbbi pedig tetszés szerinti számú 1-essel írt, vagyis határozatlan számra.

Nem látható be, hogy enélkül milyen hosszú számolás után bukkantunk volna rá a fenti megoldásra, vagy egy esetleges más megoldásra.

Megjegyzés. Szorzás útján is megkaphatjuk a A számot. Az utolsó 3 lépés sorrendjét megfordítva: A olyan szám, amelyet a következő 3 változtatás után visszkapunk: I. a végére írunk egy 7-est, II. az új számot szorozzuk 7-tel, III. a szorzat elejétől elhagyunk egy 7-est. Így, I. és II. alapján a szorzat utolsó jegye $7 \cdot 7 = 49$ -nek a 9-e, ez A egyese, egyben a szorzandó tízes helyi értékű jegye; ezért a szorzat tízes jegye $7 \cdot 9 + 4 = 67$ -ből a 7-es, ez a szorzandó százasa; ezért a szorzat százasa $7 \cdot 7 + 6 = 55$ -ből az 5-ös, ezrese a $7 \cdot 5 + 5 = 40$ -ből a 0, és így tovább.

Olyan helyen állhatunk meg ebben az eljárásban, ahol 7-et írtunk le, és nincs tízes átvitel, ekkor A -t – III. szerint – ennek a 7-esnek az elhagyásával kapjuk. Főnt mindjárt az első lehetséges helyen megálltunk, a szorzat 22-ik jegye lett a maradék nélküli 7-es. Továbbmenve a $44.$, $66.$, $\dots$, $22k$, $\dots$ sorszámú jegyek – mindig a 7-es – leírása lenne alkalmas hely a megállásra.

2. További, mélyebb megjegyzés olvasható ezen szám 193. oldalán.