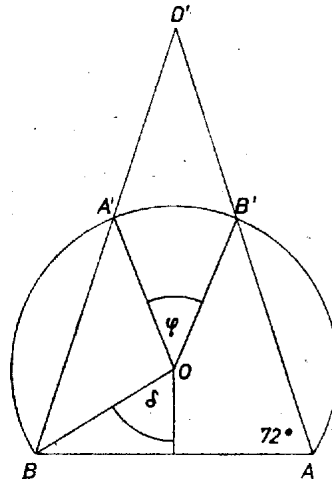


Messe az AB szakasz ϑ nyílásszögű ($90^\circ \geq \vartheta > 36^\circ$), O középpontú látószögműködő AD' -t B' -ben, BD' -t A' -ben (3. ábra).



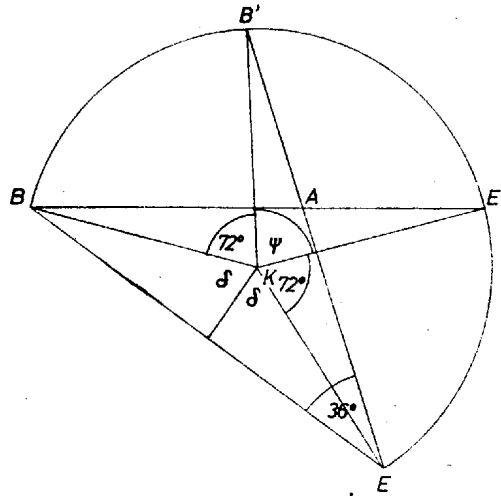
3. ábra

Az $AOB \sphericalangle = 2\vartheta$, $BOB' \sphericalangle = A'OA \sphericalangle = 2 \cdot 72^\circ$ szögek lefedik az O körüli teljes szöget és az $A'OB' \sphericalangle = \varphi$ szöget mégegyszer, így

$$\varphi = (2\vartheta + 2 \cdot 144^\circ) - 360^\circ = 2\vartheta - 72^\circ.$$

Hasonlóan az EB szakasz ϑ nyílásszögű, K középpontú látóköri íve $E'B'$ rész-ívéhez tartozó középponti szög (mint előrebocsátottuk, B' azonos az előző számításban B' -vel, 4. ábra)

$$\psi = 360^\circ - (2\vartheta + 2 \cdot 72^\circ) = 216^\circ - 2\vartheta.$$



4. ábra

Így a három útvonal megfelelő íveihez tartozó középponti szög, mindjárt átszámítva ívmértékre

$$\varphi_{90} = 108^\circ = \frac{3\pi}{5},$$

$$\varphi_{60} = 48^\circ = \frac{4\pi}{15},$$

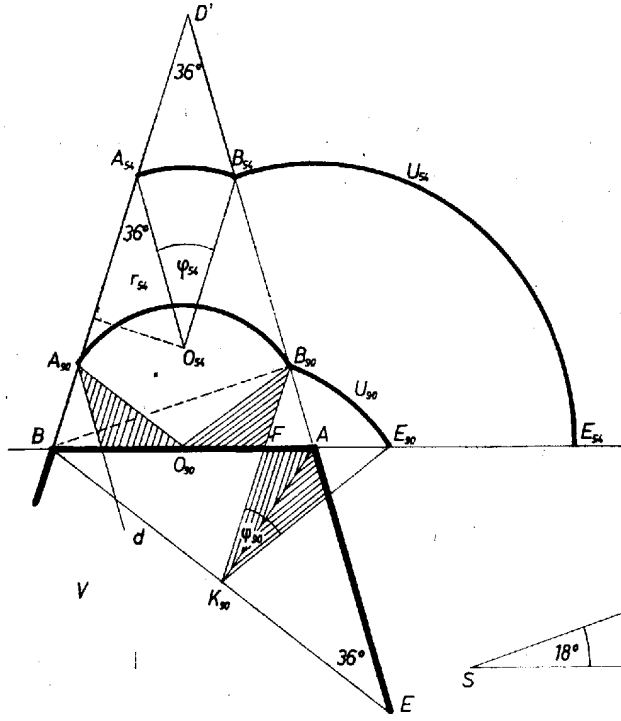
$$\varphi_{54} = 36^\circ = \frac{\pi}{5},$$

$$\psi_{90} = 36^\circ = \frac{\pi}{5},$$

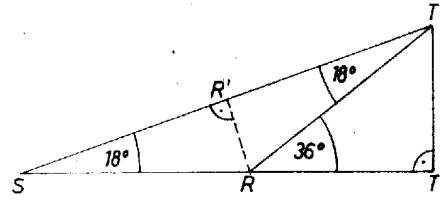
$$\psi_{60} = 96^\circ = \frac{8\pi}{15},$$

$$\psi_{54} = 108^\circ = \frac{3\pi}{5}.$$

(Az A' , B' , E' pontot az 5. ábrán A_ϑ , B_ϑ , E_ϑ jelöli.)



5. ábra



6. ábra

Ezek alapján az U_ϑ útvonalak hossza, 4 értékes számjegyre

$$U_{90} = 5(A_{90}B_{90} + B_{90}E_{90}) = 5(r_{90} \cdot \varphi_{90} + R_{90} \cdot \psi_{90}) = \frac{\pi a}{4} (7 + \sqrt{5}) = 725,4 \text{ m},$$

$$U_{60} = 5(r_{60} \cdot \varphi_{60} + R_{60} \cdot \psi_{60}) = \frac{4\pi a}{3\sqrt{3}} (2 + \sqrt{5}) = 1024 \text{ m},$$

$$U_{54} = 5(r_{54} \cdot \varphi_{54} + R_{54} \cdot \psi_{54}) = \frac{\pi a}{2} (5 + \sqrt{5}) = 1137 \text{ m}.$$

II. A belső U_{90} és a külső U_{54} közti területet mint az U_{54} , valamint az U_{90} által körülhatárolt T_{54} és T_{90} területek különbségét számítjuk, a szimmetriát ismét felhasználva.

A $B_{54}E_{54}$ körív középpontja A , mert $BAE \sphericalangle = 108^\circ$, a látószög 2-szerese. Így T_{54} -nek M -beli része az $AB_{54}E_{54}$ és az $O_{54}A_{54}B_{54}$ körcikk és az $ABA_{54}O_{54}B_{54}$ ötszög. Az ötszög az ABD' háromszög és az $O_{54}A_{54}D'B_{54}$ négyszög különbsége, az utóbbi pedig rombusz, mert φ_{54} egyenlő az $AD'B$ szöggel. Az ABD' háromszögnek a szárra merőleges magassága és hasonlóan a rombusz magassága $BB_{90} = BE \sin 36^\circ = d \sin 36^\circ$, ill. $r_{54} \sin 36^\circ$, így – a vár alapidomának területét V -vel jelölve –

$$T_{54} = V + 5 \left\{ \frac{R_{54}^2 \cdot \psi_{54}}{2} + \frac{r_{54}^2 \cdot \varphi_{54}}{2} + \sin 36^\circ \left(\frac{d^2}{2} - r_{54}^2 \right) \right\} =$$

$$V + \frac{\pi a^2}{4} (9 - \sqrt{5}) + \frac{15a^2 \sin 36^\circ}{4} (\sqrt{5} - 1).$$

Az $A_{90}B_{90}$, $B_{90}E_{90}$ ív középpontja a BA oldal, ill. BE átló felezőpontja, így a $K_{90}B_{90}E_{90}$ körcikk belenyúlik V -be, messe a $B_{90}K_{90}$ sugár AB -t F -ben. Megmutatjuk, hogy a benyúló AFK_{90} háromszög területe egyenlő az U_{90} és V közötti, az U_{90} íveihez tartozó körcikkkel le nem fedett $B_{90}FO_{90}$ háromszög területével; ebből következik, hogy T_{90} egyenlő V és az $O_{90}A_{90}B_{90}$, $K_{90}B_{90}E_{90}$ körcikk 5-szörös területének összegével. Valóban,

$$B_{90}FA \sphericalangle = FAK_{90} \sphericalangle + FK_{90}A \sphericalangle = 54^\circ + \psi_{90}/2 = 72^\circ = B_{90}AF \sphericalangle = AB_{90}O_{90} \sphericalangle,$$

hiszen $B_{90}O_{90} = AO_{90}$. Így $B_{90}F$ felezi az $AB_{90}O_{90}$ szöveget, $B_{90}AF$ és $FO_{90}B_{90}$ egyenlő szárú háromszögek, $FO_{90} = FB_{90} = AB_{90}$, az előbbi hasonló $O_{90}AB_{90}$ -hez, ezért

$$(1) \quad O_{90}A : AB_{90} = AB_{90} : AF = AB_{90} : (O_{90}A - AB_{90}),$$

$$AB_{90}^2 + O_{90}A \cdot AB_{90} - O_{90}A^2 = 0,$$

ahonnan a pozitív gyök

$$AB_{90} = O_{90}A \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{a}{4} (\sqrt{5} - 1),$$

$$FK_{90} = R_{90} - B_{90}F = R_{90} - AB_{90} = \frac{a}{2} = O_{90}A.$$

Mármost ismét (1) alapján

$$FB_{90} \cdot FO_{90} = FA \cdot FK_{90},$$

amit $(1/2) \sin 72^\circ$ -kal szorozva a két oldalon a mondott háromszögek területe áll, hiszen AB -re merőleges magasságuk $FB_{90} \sin 72^\circ$, ill. $FK_{90} \sin 72^\circ$.

Így a fentiek szerint

$$T_{90} = V + \frac{5}{2}(R_{90}^2 \cdot \psi_{90} + r_{90}^2 \cdot \varphi_{90}) = V + \frac{\pi a^2}{16} (9 + \sqrt{5}),$$

és az U_{90} és U_{54} közti terület

$$T = T_{54} - T_{90} = \frac{\pi a^2}{16} (27 - 5\sqrt{5}) + \frac{15a^2}{4} (\sqrt{5} - 1) \cdot \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} =$$

$$= 58\,307 \text{ m}^2 = 5,83 \text{ hektár}.$$

Hárs László (Budapest, Berzsenyi D. Gimn.)

Megjegyzés. $\sin 36^\circ$ felhasznált értékét az 1560. feladatban talált

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}, \quad \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

értékekből megkaphatjuk a II. osztályosok előtt általában még nem ismert addíciótétel (2-szeres szög függvényei) nélkül is, a 18° -os alapszögű RST egyenlő szárú háromszögből, ennek kétféle magasságát berajzolva és felhasználva a sinus és cosinus definícióját, valamint a külső szög tételét (6. ábra).

$$\begin{aligned} \sin 36^\circ &= \frac{TT'}{RT} = \frac{ST \sin 18^\circ}{RT} = 2 \sin 18^\circ \cdot \frac{R'T}{RT} = \\ 2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ &= \frac{2}{16} \sqrt{(6 - 2\sqrt{5})(10 + 2\sqrt{5})} = \frac{1}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}; \end{aligned}$$

$\cos 36^\circ$ fenti értéke pedig pl. ugyanezen ábrából

$$\cos 36^\circ = \frac{RT'}{RT} = \frac{ST' - SR}{RT} = \frac{ST \cos 18^\circ}{RT} - 1 = 2 \cos 18^\circ \cdot \frac{R'T}{RT} - 1 = 2 \cos^2 18^\circ - 1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}.$$