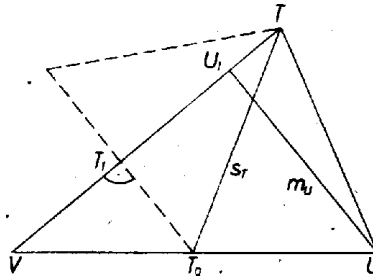
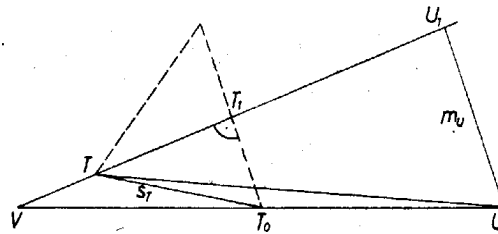


A feladat megoldása a következő észrevételen alapszik: ha a TUV háromszögben a T -ből induló s_T súlyvonal hossza egyenlő az U -ből induló m_U magasság hosszával, akkor s_T 30° -ot vagy 150° -ot zár be a TV oldallal, és megfordítva is, ha a mondott szög 30° vagy 150° , akkor $s_T = m_U$ (l. *a* és *b* ábra).



1a. ábra



1b ábra

Valóban, legyen UV felezőpontja T_0 , továbbá T_0 és U vetülete a TV egyenesen T_1 , U_1 , akkor T_0T_1 az UU_1V háromszög középvonala, s így

$$T_0T_1 = \frac{1}{2}UU_1 = \frac{1}{2}m_U = \frac{1}{2}s_T = \frac{1}{2}T_0T,$$

vagyis a TT_0T_1 derékszögű háromszögben a T_0T_1 befogó az átfogó fele, s így TT_1 -re tükrözve a háromszöget, szabályos háromszög keletkezik, tehát $T_0TT_1 \angle = 30^\circ$ vagy 150° aszerint, hogy T_1 és U_1 a TV félegyenesen vagy T -n túli meghosszabbításán van-e.

Fordítva, ha a $T_0TT_1 \angle = 30^\circ$ vagy 150° , akkor a TT_0T_1 derékszögű háromszögben

$$T_0T_1 = \frac{1}{2}T_0T,$$

másképp, mivel T_0T_1 az UU_1V háromszög középvonala, így

$$T_0T_1 = \frac{1}{2}UU_1,$$

tehát

$$s_T = m_U.$$

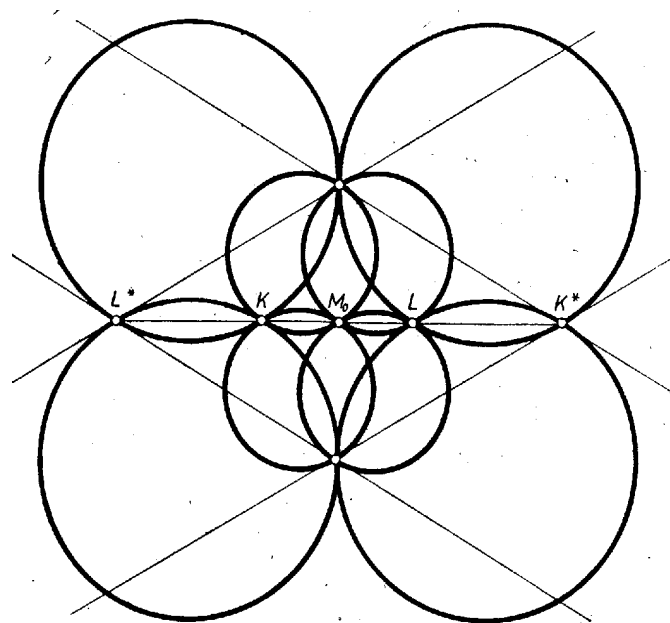
Feladatunkban az egyenlő magasság és súlyvonal közül az elsőnek a kezdőpontját a három csúcs közül háromféleképpen választhatjuk és ehhez az utóbbi kezdőpontját a maradó csúcsok közül mindig kétféleképpen, ami 6 lehetőséget jelent.

A magasságot m -mel, a súlyvonalat s -sel jelölve és indexben tüntetve fel azt a csúcsot, amelyikből indul, ezt a hat lehetséges esetet három párba sorolhatjuk az alábbi módon:

I. $m_M = s_K$,	I'. $m_M = s_L$,
II. $m_K = s_M$,	II'. $m_L = s_M$,
III. $m_L = s_K$,	III'. $m_K = s_L$.

Világos, hogy az egymás mellett álló feltételekben csak K és L szerepe cserélődik meg, s így a megfelelő M pontok halmaza egymás tükörképe a KL szakasz felező merőlegesére. Elég tehát csak az I., II. és III. feltételeket kielégítő M pontokat megkeresnünk. Az is világos, hogy minden megfelelő M ponttal együtt a KL egyenesre vonatkozó tükörképére is teljesülnek a feladat feltételei.

I. Az első esetben – LM felezőpontját K_0 -lal jelölve – az előrebocsátott megjegyzés szerint az $LKK_0 \angle$ vagy 30° vagy 150° és a KL -vel ilyen szöget bezáró két egyenes minden a K -tól különböző pontja szerepelhet K_0 -ként (2. ábra).



5. ábra

Cserhádi András (Székesfehérvár, Teleki B. Gimn., II. o. t.) dolgozatából összevonásokkal