

Feltesszük, hogy $a \neq 0$, mert különben minden x -re $y = -x$ kielégíti az egyenletrendszert.

A (2) bal oldalát ismert azonosság alapján szorzattá alakítjuk:

$$(x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) = 2a^5,$$

és így, (1) figyelembevételével

$$(3) \quad x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 = 2a^4.$$

Másrészt

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = a^4,$$

és ebből (3)-at kivonva egyenletet kapunk az xy szorzatra:

$$\begin{aligned} 5xy(x^2 + xy + y^2) &= 5xy[(x+y)^2 - xy] = 5xy(a^2 - xy) = -a^4, \\ 5(xy)^2 - 5a^2(xy) - a^4 &= 0. \end{aligned}$$

Ebből

$$(xy)_I = \frac{a^2}{10}(5 - 3\sqrt{5}), \quad (xy)_{II} = \frac{a^2}{10}(5 + 3\sqrt{5}).$$

Ezeket (1)-gyel összekapcsolva ismerjük x és y összegét és szorzatát, így két különálló másodfokú egyenletet kapunk, melyeknek gyökei az (1)-et és (2)-t kielégítő x , y értékpárok. Az $(xy)_I$ alapján adódó egyenlet

$$z^2 - az + \frac{a^2}{10}(5 - 3\sqrt{5}) = 0,$$

és így az adódó x , y értékpár

$$\frac{a}{2} \pm \frac{a}{10} \sqrt{30\sqrt{5} - 25}.$$

Numerikusan $a \cdot 1,1487$ és $-a \cdot 0,1487$.

Az $(xy)_{II}$ alapján adódó egyenletnek nincs valós megoldása, az adott rendszert tehát két valós x , y értékpár elégíti ki, amelyek az értékek felcserélésével keletkeznek.

Ekvivalens átalakításokat végeztünk, nem veszthetünk el gyököket és új gyök sem léphetett be, ezért a megoldások kipróbálása nem szükséges.

Megjegyzés. Kézenfekvő a rendszert egyismeretlenes egyenletre visszavezetni, (1) alapján az új z ismeretlent vezetve be:

$$x = \frac{a}{2} + z, \quad y = \frac{a}{2} - z.$$

Ezeket (2)-be beírva z páratlan kitevős hatványai kiesnek:

$$\begin{aligned} 2 \left[\left(\frac{a}{2} \right)^5 + 10 \left(\frac{a}{2} \right)^3 z^2 + 5 \frac{a}{2} z^4 \right] &= 2a^5, \\ z^4 + \frac{a^2}{2} z^2 - \frac{31a^4}{80} &= 0, \quad (a \neq 0) \\ z &= a \sqrt{-\frac{1}{4} \pm \frac{3}{2\sqrt{5}}}, \end{aligned}$$

ami, a belső gyököket + előjellel véve a fentivel azonos eredmény.

