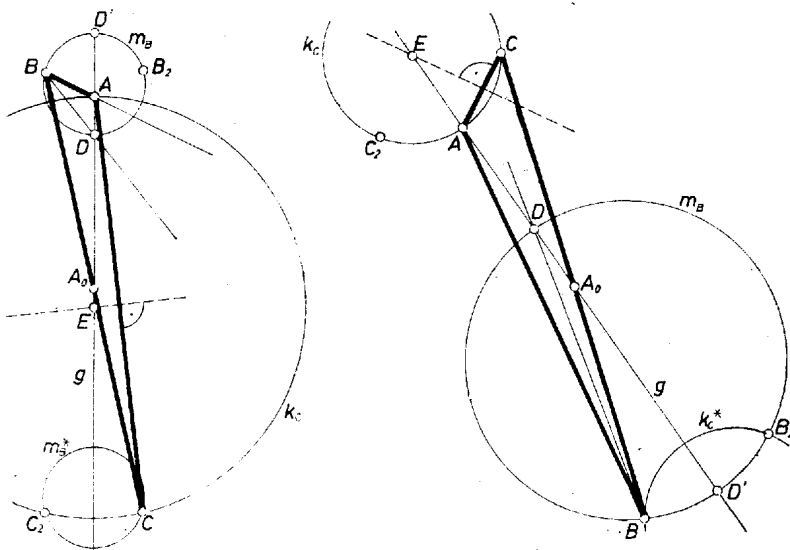


Azok a C pontok, amelyekre az AC szakasz felező merőlegese átmegy E -n, E -től EA távolságra vannak. Megfordítva, az E középpontú, A -n átmenő k_C kör minden, az A -tól különböző C pontjára teljesül is ez a feltétel. Mégis ki kell zárunk az A -val átteljes pontot is, mert az ABC háromszög C csúcsa nem lehet az AA_0 súlyvonalon.



A D pont alapján meg tudjuk határozni azoknak a pontoknak az m_B mértani helyét, amelyek megfelelnek B csúcsként. És mivel még C a B -nek A_0 -ra vonatkozó tükörképe, azért m_B -nek A_0 -ra vonatkozó tükörképe szintén tartalmazza a C csúcsot, így ennek a k_C -vel közös pontjai megadják a megfelelő C csúcsokat, továbbá ezeknek A_0 -ra vonatkozó tükörképei rendre a hozzájuk tartozó B csúcsot.

A D pont egyszerre mind az AA_0B háromszög B -ből induló belső szögfelezőjének is AA_0 -lal való metszéspontja, ezért a B -ből induló (ismeretlen) oldalak $BA : BA_0$ aránya egyenlő az AA_0 oldalon keletkezett, ismert szakaszok $DA : DA_0 = k$ arányával. Így m_B azon pontok mértani helye, amelyekre nézve az adott A , A_0 pontoktól mért távolságok aránya egyenlő két adott szakasz arányával.

Mármost ha $k = 1$, vagyis D éppen felezi az AA_0 szakaszt, akkor e szakasz felező merőlegese adja m_B -t. Ha pedig $k \neq 1$, akkor, mint ismeretes, m_B egy kör, éspedig az A , A_0 alappontokhoz és a k arányértékhez tartozó ún. Apollóniosz-féle kör. Pontosabban véve: sem a felező merőlegesnek, sem az Apollóniosz-körnek nem felel meg az adott pontokat tartalmazó g egyenesen levő D , ill. D és D' pontja, hiszen a keresett háromszög B csúcsa sem lehet rajta az AA_0 súlyvonalon; viszont minden más pontjuk megfelel B -ként.

Ezzel a feladatot megoldottuk, csupán $k \neq 1$ esetére az m_B kör egy megszerkesztési módját idézzük emlékezetbe. Elég az említett D' pontot megszerkesztetni, mert DD' az m_B -nek átmérője (hiszen a középpontja g -n van; ha ugyanis egy B pont eleget tesz a $BA : BA_0 = k$ feltételnek, akkor ugyanez a g -re vonatkozó tükörképére is áll). Húzzunk A -ból egy a g -hez hajló h félegyenest és fordítsuk rá A körül a D pontot a H helyzetbe, majd az A_0 -on átmenő, h -val párhuzamos és egyirányú h_0 félegyenesre fordítsuk rá A_0 körül D -t a H_0 helyzetbe, ekkor D' -t a HH_0 egyenes metszi ki g -ből. ($k \neq 1$ miatt $AH \neq A_0H_0$, HH_0 nem párhuzamos g -vel, D' mindig létrejön.)

A fentiek szerint C megfelelő helyzetét m_B -nek A_0 -ra vett m_B^* tükörképe metszi ki k_C -ből. A megfelelő pontok száma 2 vagy 0, ugyanis k_C és m_B^* érintkezése esetén nincs megoldás, hiszen csak g valamely pontjában érinthetnék egymást, az ilyen pontokat pedig kizártuk. Metszés esetén mindkét C -helyzetet elfogadjuk – bár egymás képei g -re vonatkozóan –, mert helyzet-adatokból indultunk ki, ezért B és C helyzete volt megszerkesztendő, másrészt B és C szerepe nem cserélhető fel.

Minthogy a feladatot kizárólag mértani helyek megszerkesztésére vezettük vissza, azért nincs szükség annak külön bizonyítására, hogy a kapott ABC háromszögek megfelelnek a követelményeknek.

Az adott pontok közül D csak az AA_0 szakasz belső pontja lehet, E viszont g -nek bármely, az A -tól különböző pontja. Amennyiben E azonos A_0 -lal, akkor a háromszög A -nál derékszögűnek adódik, hacsak $DA : DA_0 < 2$.

Török Gyula (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn.)
Szendrei Ágnes (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn.)