

Az egyenlet bal oldalát szorzattá alakíthatjuk, ugyanis az első 3 tagból x^6 -ot, a további 3-ból -64 -et kiemelve a két zárójelben ugyanaz a polinom adódik:

$$x^6(x^4 - 5x^2 + 4) - 64(x^4 - 5x^2 + 4) = (x^6 - 64)(x^4 - 5x^2 + 4),$$

így (1) gyökei mindazok az x értékek, amelyek mellett a két tényező közül legalább az egyiknek az értéke 0, vagyis amelyekre

$$(2) \quad \text{vagy} \quad x^6 - 64 = 0,$$

$$(3) \quad \text{vagy} \quad x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$$

(2) bal oldala az $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ azonosság alapján tovább bontható:

$$x^6 - 64 = (x^2)^3 - 4^3 = (x^2 - 4)(x^4 + 4x^2 + 16),$$

tehát (2) teljesül, ha

$$(4) \quad x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) = 0, \quad \text{és ha}$$

$$(5) \quad x^4 + 4x^2 + 16 = (x^2 + 4)^2 - 4x^2 = (x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 4) = 0.$$

(3) pedig így írható:

$$(x^4 - 4x^2) - (x^2 - 4) = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2) = 0.$$

eszerint gyökei:

$$(6) \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -2, \quad x_4 = 2.$$

(4) nem ad új gyököt, mert csak a talált x_3 -ra és x_4 -re teljesül, (5)-nek pedig nincs (valós) gyöke; mert bal oldalának mindkét tényezője minden (valós) x -re pozitív:

$$x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3 > 0,$$

$$x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3 > 0.$$

Ezek szerint (1) gyökei a (6) alatti számok.

Pető János (Budapest, Kölcsey F. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzések. 1. x_3 és x_4 kétszeres gyöke (1)-nek, ugyanis a többszöri felbontás alapján (1) bal oldala így írható:

$$(x + 1)(x - 1)(x + 2)^2(x - 2)^2(x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 4).$$

2. A (2) bal oldalát az idézett azonosság alapján így is bonthatjuk:

$$x^6 - 64 = (x^3 - 8)(x^3 + 8) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x + 2)(x^2 - 2x + 4).$$