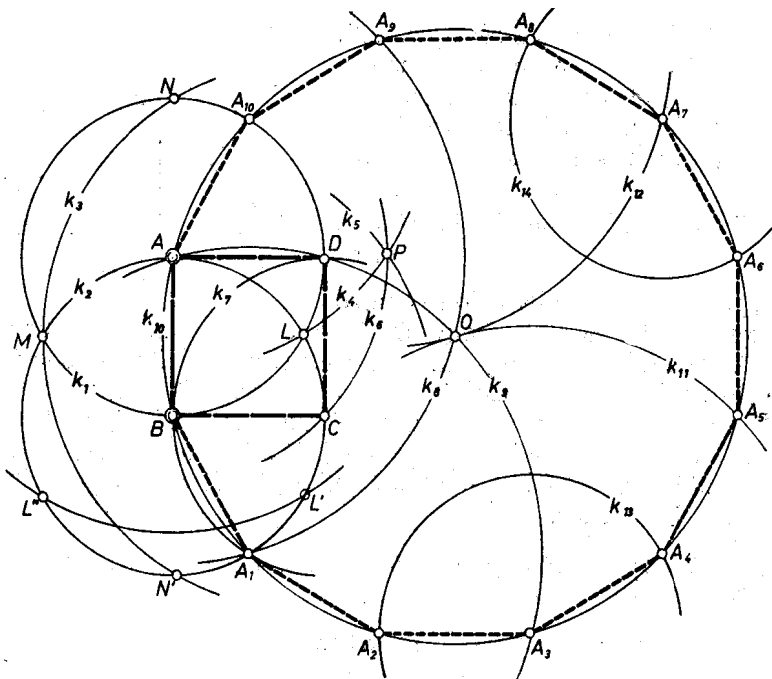


a) A keresett négyzet további két csúcsát C -vel, D -vel jelöljük, minden más betű előkészítő (segéd-)pontokat jelöl.

Megoldottuk a feladatot, ha sikerül a négyzet AC és BD átlója céljára $\sqrt{2} \cdot AB$ hosszúságú szakaszt szerkeszteni. Könnyen tudunk $\sqrt{3} \cdot AB$ hosszúságot szerkeszteni, ekkora pl. az A és a B középpontú, AB sugarú körök közös húrja. Most már a $2AB$ alapú, $\sqrt{3} \cdot AB$ szárú egyenlő szárú háromszög magassága a keresett távolságot nyújtja. Ez szintén megszerkeszthető csak körzövel. A szerkesztés aránylag kevés körrel a következő módon hajtható végre.

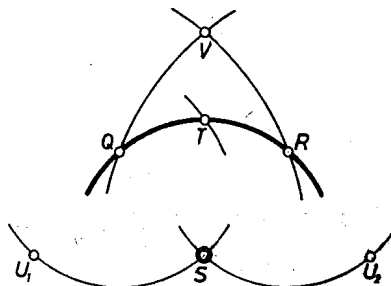


1. ábra

Legyen az A pont körüli, AB sugarú kör – röviden: az $A(AB)k_1$ kör – és a $B(BA) = k_2$ kör két metszéspontja L , M (1. ábra), továbbá k_1 és az $L(LM) = k_3$ kör M -től különböző metszéspontja N , az $N(LM) = k_4$ és $B(LM) = k_5$ körök egyik metszéspontja P . Ekkor C -t k_2 -ből az $A(AP) = k_6$ kör metszi ki, D pedig k_1 és a $C(AB) = k_7$ kör metszéspontja. (Elég C -ként az egyik metszéspontot venni, mert a másik metszéspont az elsőnek a tükörképe az AB egyenesre nézve.)

A szerkesztés szerint ABL és ABM egyenlő oldalú háromszögek, $LAM \sphericalangle = LAB \sphericalangle + BAM \sphericalangle = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$, eszerint LM a k_1 -be írt egyenlő oldalú háromszög oldala, ezért LN is az, $LAN \sphericalangle = 120^\circ$, tehát N a B pont tükörképe A -ra nézve. Így a PBN háromszög egyenlő szárú, és alapjának felezőpontja A , ezért $PAB \sphericalangle = 90^\circ$. Továbbá $AMBL$ rombusz, emiatt¹ $AB^2 + LM^2 = 4AL^2$, $LM^2 = 3AB^2$, ezért az ABP derékszögű háromszögben $AP^2 = BP^2 - AB^2 = LM^2 - AB^2 = 2AB^2$, vagyis $AC^2 = 2 \cdot AB^2$; eszerint C megfelel a követelménynek, D pedig paralelogrammává, négyzetté egészíti ki az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszöget.

b) A szabályos 12-szöget az előbbi $ABCD$ négyzet felhasználásával abból szerkesztjük, hogy egy szöge $150^\circ = 90^\circ + 60^\circ$, tehát B -vel, A -val szomszédos A_1 , ill. A_{10} csúcsa a BC , ill. AD oldal fölé kifelé szerkesztett szabályos háromszög csúcsa (2. ábra).



2. ábra

További csúcsai legyenek $A_2, A_3, \dots, A_9$. Az A_1 csúcs már ki van tűzve, mint k_2 és k_7 metszéspontja. Legyen az $A(AA_1) = k_8$ és $A_1(AA_1) = k_9$ körök C -hez közelebbi metszéspontja O , ekkor az $O(AA_1) = k_{10}$ kör a k_1, k_8 és k_9

¹ Paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő oldalainak négyzetösszegével, lásd legutóbb az 1040. gyakorlatban, K. M. L. 33 (1966) 152. o.

körből kimetszi rendre az A_{10} , A_9 , A_3 pontot, k_{10} -ből pedig az $A_3(AA_1) = k_{11}$ az A_5 -öt, $A_9(AA_1) = k_{12}$ az A_7 -et, végül $A_3(AB) = k_{13}$ és $A_7(AB) = k_{14}$ az A_2 , A_4 , A_6 , A_8 csúcsot.

E lépéseket az indokolja, hogy $AA_1A_3A_5A_7A_9$ a 12-szög köré írt körnek beírt szabályos hatszöge, ezért a kör középpontjából AA_1 60° szögben látszódik, ennek megfelel O , és a körülírt kör k_{10} .

Úry László (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., I. o. t.)

Megjegyzések. 1. A_1 -et a C pont felhasználása nélkül is megkaphatjuk abból, hogy LBA_1 egyenlő szárú derékszögű háromszög, a szükséges körívek száma így is 7. (A k_2 -be írt $ALL'N'L''M$ szabályos hatszög csúcsait használjuk fel, N' -t kimetszi k_3 , L' -t és L'' -t pedig az $A(LM)$ kör.)

2. C -t tekinthetjük az LL' és AN' ívek, A_1 -et pedig az $L'N'$, LL'' ívek felezőpontjának is. Az ezeket kijelölő eljárás általánosításaként megemlítiük, hogyha adott egy QR körív és az ezt tartalmazó kör S középpontja, akkor körző használatával kijelölhető az ív T felezőpontja (2. ábra): az U_1 , U_2 pontokkal mint negyedik csúccsal paralelogrammává egészítjük ki az SRQ , SQR háromszögeket, az S -sel felezett U_1U_2 szakasz fölött U_1R szárral U_1U_2V egyenlő szárú háromszöget szerkesztünk, végül a QR ívet metsszük az $U_1(SV)$ körrel, a metszéspont T . A bizonyítást az olvasóra hagyjuk.

Váli László (Budapest, I. István Gimn., II. o. t.)

3. A most mondott ívfelezés néhány előkészítő lépés után végrehajtható akkor is – szintén kizárólag körző használatával –, ha csak a QR ív adott, de tudjuk, hogy az egy kör része (körív hiányzó középpontjának megszerkesztése, ún. Napóleon-szerkesztés).

4. Az érdeklődők az 1294. feladatban – K. M. L. 29 (1964) 136. o. – megtalálhatják a szabályos ötszög csúcsainak csak körzővel való megszerkesztését, ha adott két szomszédos vagy két másodsomszédos csúcsa.