

Képezzük az (1) sorozat a_n és a_{n+2} tagja számtani közepének felét, így az állítás szerint a_{n+1} -et kell kapnunk. Valóban,

$$\begin{aligned}\frac{a_n + a_{n+2}}{4} &= \frac{1}{8\sqrt{3}}[(2 + \sqrt{3})^{n+2} + (2 + \sqrt{3})^n] - \frac{1}{8\sqrt{3}}[(2 - \sqrt{3})^{n+2} + (2 - \sqrt{3})^n] = \\ &= \frac{(2 + \sqrt{3})^{n+1}}{8\sqrt{3}} \left[2 + \sqrt{3} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \right] - \frac{(2 - \sqrt{3})^{n+1}}{8\sqrt{3}} \left[2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \right]\end{aligned}$$

és itt mindkét szögletes zárójel értéke

$$(2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4,$$

hiszen $2 + \sqrt{3}$ és $2 - \sqrt{3}$ egymás reciproakai; ennél fogva

$$\frac{a_n + a_{n+2}}{4} = \frac{1}{2\sqrt{3}}[(2 + \sqrt{3})^{n+1} - (2 - \sqrt{3})^{n+1}] = a_{n+1},$$

ami a bizonyítandó állításnak az egymás utáni taghármasok közti összefüggésre vonatkozó része.

Ez a tulajdonság a sorozatot akkor határozza meg, ha ismert a sorozat két tagja is. Pl. a_1 -ből és a_2 -ből $a_3 = 4a_2 - a_1$, $a_4 = 4a_3 - a_2, \dots$ Mármint az idézett sorozat első két tagja 1 és 4 volt, (1)-ből pedig

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{1}{2\sqrt{3}}[(2 + \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{3})] = 1, \\ a_2 &= \frac{1}{2\sqrt{3}}[(2 + \sqrt{3})^2 - (2 - \sqrt{3})^2] = 4,\end{aligned}$$

tehát a két sorozat valóban azonos.

Gáspár Gyula (Miskolc, Vörösmarty úti Ált. Isk. 8. o. t.)