

I. megoldás. Az adott egyenlőség bal és jobb oldala különbségének – ami 0 – a 2-szerese alkalmas csoportosítással így alakítható:

$$(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 = 0$$

Ámde egyik tag sem negatív, ezért az egyenlőség valós számok között csak úgy állhat fenn, ha mind a három tag 0. Ekkor pedig a kérdéses számok páronként egyenlők, az állítás igaz.

II. megoldás. Tekintsük (1)-ben a -t ismeretlennek, b -t és c -t paramétereknek. Ennek megfelelően rendezve

$$(2) \quad a^2 - (b + c)a + (b^2 - bc + c^2) = 0.$$

A diszkrimináns

$$\begin{aligned} D &= (b + c)^2 - 4(b^2 - bc + c^2) = -3(b^2 - 2bc + c^2) = \\ &= -3(b - c)^2. \end{aligned}$$

A föltevés szerint a valós, ezért $D \geq 0$, ami csak $b = c$ esetén teljesül. Ekkor pedig (2)-t csak egy szám elégíti ki, és ez

$$a = \frac{b + c}{2} = \frac{2b}{2} = b = c.$$