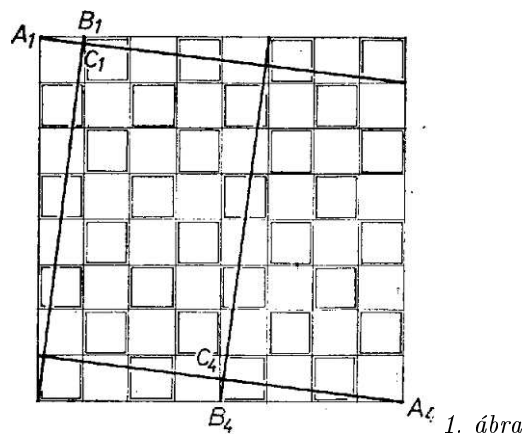
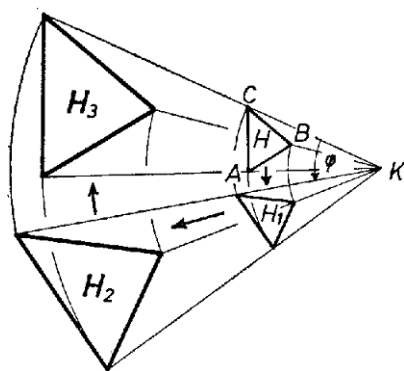
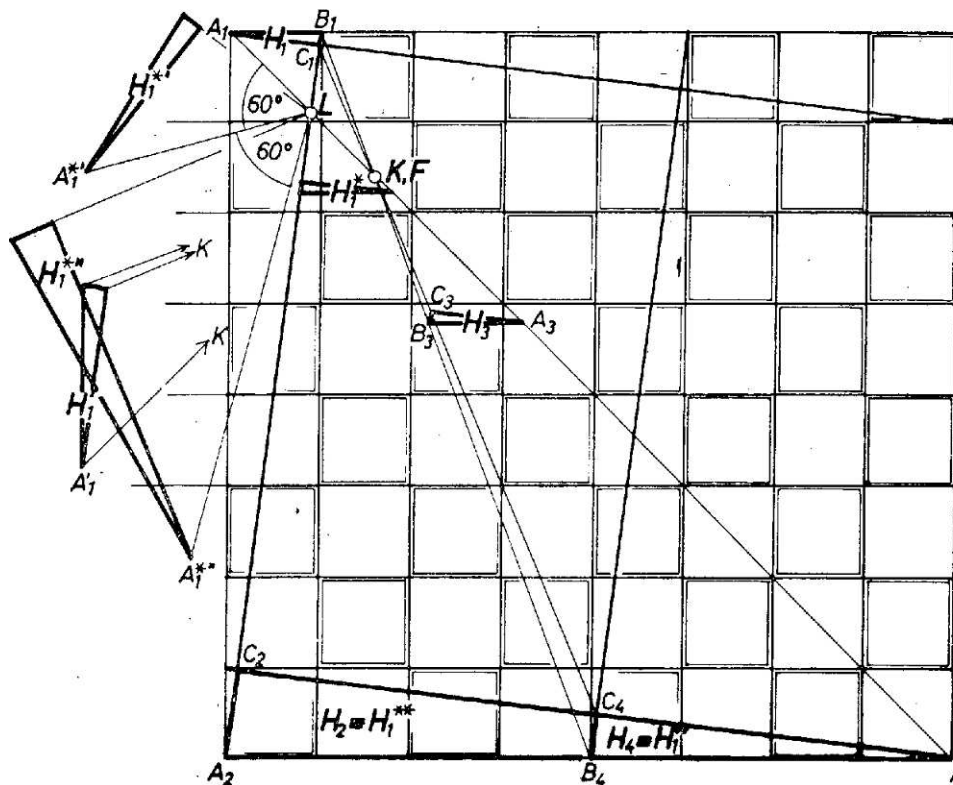




1. Először megmutatjuk, hogy minden forgatva nyújtásnál az elfordítás és a nyújtás sorrendje felcserélhető. Legyen az elfordítandó háromszög ABC , a forgatva nyújtás középpontja K , szöge φ , aránya λ (2. ábra). Ha először az $ABC = H$ háromszöget φ szöggel elforgatjuk, kapjuk H_1 -et, majd ezt λ arányban nagyítva kapjuk H_2 -t. Ha most H_1 -et és H_2 -t együtt visszaforgatjuk φ szöggel, H_1 H -ba, H_2 pedig valamilyen H_3 -ba kerül. Mivel a forgatás aránytartó, ezért H -t K -ból λ arányban kinagyítva H_3 -t fogjuk kapni. H_3 -t pedig φ szöggel elforgatva H_2 -be jutunk, ugyanoda, mint az előbb.



2. Most felhasználjuk, hogy az A_1A_4 , B_1B_4 és C_1C_4 egyenesek egy ponton mennek keresztül. Legyen ez a pont K (3. ábra). K körül az $A_1B_1C_1 = H_1$ háromszöget 180° -kal elforgatva kerüljön a H_3 helyzetbe. Mivel a két eredeti (H_1 és H_4) háromszögben a megfelelő oldalak párhuzamosak, azért így lesz ez a H_3 és H_4 háromszögek esetében is, vagyis a két háromszög hasonló lesz. Másrészt a megfelelő csúcsokat összekötő egyenesek egymást K -ban metszik, azért K -ból a H_3 háromszöget megfelelő arányban kinagyítva éppen H_4 -be jutunk. Ez az arány megegyezik a két háromszög hasonlósági arányával, vagyis $1 : 4$ -gyel.



3. ábra

3. A 2.-ben leírt forgatva nyújtást a következőképpen bontjuk két részre: a) K körül H_1 -t $\varphi = 90^\circ$ -kal forgatjuk el, az arányossági tényező $\lambda = 2$. Így H_1' -t kapjuk. Ezt tovább forgatjuk 90° -kal, majd ezt is $\lambda = 2$ arányban nagyítjuk K -ból. Így eljutunk H_1'' -höz. Ez azonos lesz H_4 -gyel, ugyanis H_4 -et összesen $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ -kal forgattuk el, és $2 \cdot 2 = 4$ -szeresére nyújtottuk. H_1' nyilván megszerkeszthető, 90° -kal elforgatni és kétszeresére nyújtani könnyen lehet.

Már csak az van hátra, hogy megmutassuk, az A_1A_4 , B_1B_4 és C_1C_4 egyenesek egy ponton mennek át. Ehhez nyilván elegendő azt megmutatnunk, hogy B_1B_4 és C_1C_4 metszéspontja egyforma messze van a sakktábla széleitől. Legyen e két egyenes metszéspontja F . Az FB_1C_1 és FB_4C_4 háromszögek hasonlóak, mivel oldalaik párhuzamosak. Hasonlóságuk aránya $1 : 4$, mert e két háromszög hasonlóságának aránya megegyezik a H_1 és H_4 háromszögek hasonlóságának arányával, hiszen egy-egy közös oldaluk van. Így a metszéspont B_1B_4 -et $1 : 4$ arányban osztja, tehát távolsága A_1B_1 -től $8/5$, A_1A_2 -től $1 + 3/5 = 8/5$, e két távolság valóban egyenlő.

4. Állítjuk, hogy olyan hasonló háromszögpár, melyet egymásba átvivő forgatva nyújtás felbontható 3 kívánt forgatva nyújtásba, az $A_1B_1C_1 = H_1$, valamint az $A_2A_4C_2 = H_2$ háromszögek.

Legyen ugyanis A_1A_4 és B_1A_2 metszéspontja L . L körül 180° -kal elforgatva H_1 -et H_1^* -ba jutunk. Mivel H_1 és H_2 hasonlóak voltak, hiszen megfelelő oldalaik párhuzamosak, H_1^* és H_2 is hasonlóak lesznek, hasonlóságuk aránya $A_1B_1 : A_2A_4 = 1 : 8$, mivel itt a megfelelő csúcsokat összekötő egyenesek egy ponton mennek keresztül, L -ből történő $\lambda = 1 : 8$ arányú nagyítás H_1^* -t éppen H_2 -be viszi. Ezt az elforgatást a következő háromra lehet felbontani: H_1 -et L körül $\varphi = 60^\circ$ -kal elforgatjuk, majd $\lambda = 2$ arányban nagyítjuk. Ezt még kétszer megismételve kapjuk H_1^{**} -ot. Ez megegyezik H_2 -vel, hiszen összesen $60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ$ -kal forgattunk el és $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ -szorosra nagyítottunk. A közbeeső háromszögek nyilván szerkeszthetők is.

Megjegyzések. 1. Desargues egyik tétele azt mondja, hogy ha két háromszög olyan helyzetű, hogy egy-egy szögpontját összekötő egyenesek egy ponton mennek át, akkor a megfelelő oldalak egy egyenesen metszik egymást és fordítva. (L. Vigassy Lajos: Síkmértani szerkesztések térmértani megoldással. 66. ábra. Szakköri füzetek.) Példánkban a megfelelő oldalak párhuzamosak, tehát metszéspontjuk ideális pont. A három ideális pont a sík ideális egyenesén van, tehát a megfelelő csúcsokat összekötő egyenesek egy (K) ponton mennek át.

2. Ha adva van két egyező körüljárású hasonló háromszög, akkor mindig csak egy olyan forgatva nyújtás létezik (K, φ, λ) , amellyel az egyik a másikba átvihető. De ez mindig létezik is. Legyen ugyanis a két háromszög egy-egy megfelelő oldala A_1B_1 és A_4B_4 , az $\frac{A_4B_4}{A_1B_1} = \lambda = \frac{KA_4}{KA_1}$. Ez azt mondja, hogy a K pontok mértani helye egy Apollonius-féle kör. Továbbá A_1B_1 és A_4B_4 szöge nagyságra és irányra nézve megegyezik az A_1KA_4 szöggel. Az adott szög miatt a K pont másik mértani helye az A_1A_4 ponton átmenő egyetlen körív. A kör és a körív mindig metszi egymást, és csak egy pontban. (Vigassy Lajos: Geometriai transzformációk. 44. ábra. Szakköri füzetek).

3. Alkalmazzunk egy AB szakaszra egy K_1 pontból egy forgatva nyújtást, majd az így nyert eredményre egy K_2 pontból egy másik forgatva nyújtást. Bizonyítható, hogy azon forgatva nyújtás középpontja (K_3) , amely az eredeti szakaszt a harmadik helyzetbe átviszi, mindig rajta van a K_1 és K_2 pontokat összekötő egyenesen. (Lásd uo. 42. ábra.)

