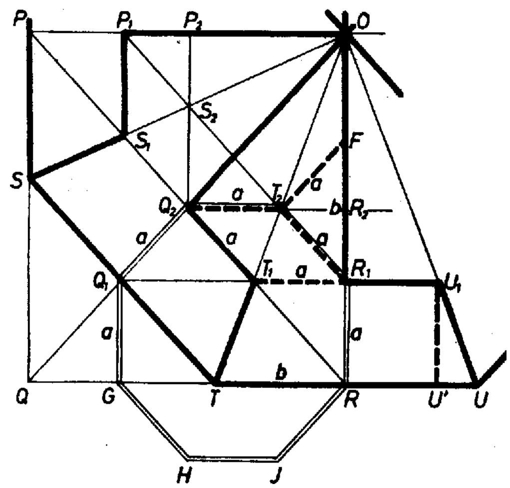
Legyen az eredeti nyolcszög centruma O, egyik oldala ST. A nyolcszög ST oldalához csatlakozó oldalain az O pont vetületét jelöljük P-vel, illetve R-rel. A nyolcszög forgásszimmetriája miatt OP és OR egyenlők és merőlegesek egymásra, ezért a PS és TR oldalak metszéspontját Q-val jelölve $OPQR$ négyzet. Jelöljük az ST, PR egyeneseknek OQ-val alkotott metszéspontját Q_1-gyel, illetve Q_2 vel. Legyenek végül a Q_1, majd a Q_2 ponton át PQ-val, illetve RQ-val húzott párhuzamosoknak az OP, OS, OT, OR egyeneseken levő pontjai rendre P_1, S_1, T_1, R_1, illetve P_2, S_2, T_2, R_2. Ekkor a megszerkesztendő felbontás egy cikke az $OP_1S_1STT_1Q_2$ sokszög, a további cikkeket ebből O körüli, $45°$-os forgatásokkal kapjuk meg (2. ábra).



2. ábra

Valóban, az OP_1S_1S törött vonalat az O körüli forgatás az OQ_2T_1T törött vonalba viszi, hiszen a szerkesztés miatt az OP, OS, OQ, OT, OR egyenesek közti szögek rendre 22,5°-osak. Továbbá PS és ST, tehát a velük párhuzamos P_1S_1, S_1T_1 egyenesek is szimmetrikusak OS-re, tehát $OP_1 = OQ_2$, OS és OT szimmetrikus OQ-ra, tehát $OS_1 = OT_1$, végül $OS = OT$.

Az eredeti cikket az első forgatás az $OQ_2T_1TUU_1R$ cikkbe viszi át, ennek feldarabolását az U_1 ből TU-ra bocsátott merőlegessel, és a T_1R_1, Q_2T_2, T_2R_1 és az OQ-val párhuzamos T_2F szakaszokkal végezzük el (F az OR egyenesen van).

Szerkesztésünk miatt az R_1T_2F háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög, hiszen $T_2R_1 \parallel ST$, $T_2F \parallel OQ$. Jelöljük ennek a háromszögnek a befogóit a-val, átfogóját b-vel ($b = a\sqrt{2}$).

Az OFT_2 háromszög egyenlő szárú, hiszen $T_2F \parallel OQ$ és OT felezi a QOR szöget, tehát $OF = a$. Mivel $OQ_2 = OR_1$, az OQ_2 szakasz hossza is $a + b$.

Az OQ_2T_2F négyszög egyenlő szárú trapéz, mert $T_2F \parallel OQ_2$, és az OF, Q_2T_2 szárak egyaránt 45°-os szöget zárnak be az OQ_2 alappal.

Az $R_1T_2Q_2T_1$ négyszög szimmetrikus OT-re, és szemközti oldalai párhuzamosak, ez tehát rombusz, és oldalai a-val egyenlőek.

Az OQ_2R háromszög szimmetrikus a Q_2R_2 tengelyre, tehát $RR_1 = FO = a$.

Végül $Q_1T_1Q_2$ is egyenlő szárú derékszögű háromszög, tehát egybevágó. R_1FT_2-vel.

Ezek szerint a $Q_1Q_2T_2R_1R$ törött vonal egy a oldalú szabályos nyolcszög határvonalának a felét adja: ebbe a nyolcszögbe helyezzük bele az eredeti nyolcszög egy cikkének a darabjait.

Legyen Q_1 vetülete QR-en G. Mivel $GR = Q_1R_1 = OR_1 = a + b$, a GR szakaszra hézagmentesen rá tudjuk illeszteni a Q_2OFT_2 trapéz Q_2O alapját, új helyzete a GR egyenes O-val ellentétes oldalán a $GRJH$ trapéz. A TUU_1T_1 trapézt az U_1-ből húzott magassága mentén elvágva, a kapott háromszöget hátlapjára fordítva és TT_1-hez illesztve téglalapot kapunk, és azt épp a GRR_1Q_1 téglalapba tudjuk áttolni. Végül az FT_2R_1 háromszöget a $T_1Q_2Q_1$ háromszögre helyezzük, ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Megjegyzések. **1.** Tetszetősebb az átdarabolás, ha nem hozunk létre túl kicsi darabokat, mint itt az UU_1U' háromszög. Ez elkerülhető, ha a TUU_1T_1 trapézt pl. az RR_1 szakasz mentén vágjuk ketté.

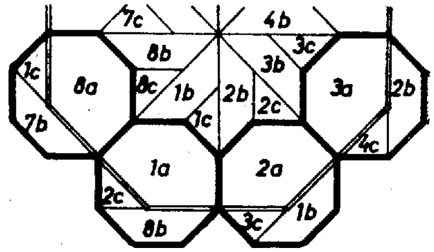
2. Az éppen most mondott vágásvonalat véve, nincs szükség arra, hogy e részek egyikét a hátoldalára fordítsuk: tegyük RUU_1R_1-et $Q_1TT_1Q_2$-re és FT_2R_1-et Q_1GT-re. Ezzel a T_1R_1 vágásvonal is feleslegessé válik.

3. Feleslegessé válik a T_1Q_2 vágásvonal is, ha a nyolcszöget a kiindulásban az oldalakra merőleges szimmetriatengelyekkel osztjuk 8 egybevágó deltoidra. Ekkor az QQ_1TR deltoidot csak 3 részre kell továbbosztanunk T_2F, T_2Q_2 és T_2R_1 mentén.

4. Mindezek a változtatások azonban egyre távolodnak jelenlegi feladatunktól, és visszahajlanak a (kitűzéskor is idézett) 1470. feladathoz. [1] A 3. ábra a 3. megjegyzés eredményét továbbfejlesztve az $1a$ jelű darabot a két szomszédos

[1] K. M. L. 35 (1967) 53. o.

deltoid $8b$ jelű trapézával, ill. $2c$ jelű háromszögével egészíti ki szabályos nyolcszöggé, így e darabok eredeti állásokban jutnak új helyükre (hasonlóan az 1470. feladat $3h$ ábrájához).



3. ábra