

a) A $+6$ szám kívánt előállításában kell fellépnie pozitív és negatív egész szám köbének is, mert a legkisebb pozitív köböt véve $4 \cdot 1^3 < 6$, viszont a következővel $2^3 > 6$. Így kapjuk a

$$(1) \quad 6 = 2^3 + (-1)^3 + (-1)^3 + 0^3 (*)$$

előállítást, amiből mindjárt $-6 = (-2)^3 + 1^3 + 1^3 + 0^3$. Mivel bármely, az előírásnak megfelelő előállításban mind a négy köbalap helyére a (-1) -szeresét írva, az összeg (-1) -szeresét kapjuk, ezért elég 6 pozitív többszöröseit tekintenünk.

Könnyíti a további próbálgatást az az észrevétel is, hogy (1)-ben két köb alapja páratlan; ugyanis már ebből látjuk, hogy mivel $6k$ és a tagok számapáros, a páratlan köbalapok számának mindig párosnak kell lennie. Másrészt, ha $6k$ nem osztható 8-cal, akkor kell is fellépnie páratlan alapnak, mert akárhány páros szám köbösszege osztható $2^3 = 8$ -cal.

Ezek alapján könnyen adódnak a következők (a köbalapokat abszolút értékük szerint csökkenően rendezve):

$$\begin{aligned} 12 &= 3^3 + (-2)^3 + (-2)^3 + 1^3, (*) \\ 18 &= 2^3 + 2^3 + 1^3 + 1^3, \\ &= 3^3 + (-2)^3 + (-1)^3 + 0^3 \\ &= 4^3 + (-3)^3 + (-3)^3 + 2^3, (*) \\ 24 &= 2^3 + 2^3 + 2^3 + 0^3, \\ &= 3^3 + (-1)^3 + (-1)^3 + (-1)^3, \\ &= 5^3 + (-4)^3 + (-4)^3 + 3^3 \quad (*) \end{aligned}$$

Majdnem mindegyik előállítás tartalmaz egyenlő alapokat és az ismétlődéseket jobban megfigyelve látjuk, hogy mind a négy szám $(*)$ jelű előállításában a középső két alap egyenlő és ezek abszolút értékének a szélső alapok szomszédai.

b) Az ezekből adódó sejtés mindjárt bizonyítását is adja a feladat állításának, ugyanis a középső két alap abszolút értékét n -nel jelölve

$$(n+1)^3 + (-n)^3 + (-n)^3 + (n-1)^3 = 6n,$$

és ez az azonosság minden egész n esetére ad egy az előírásnak megfelelő előállítást.