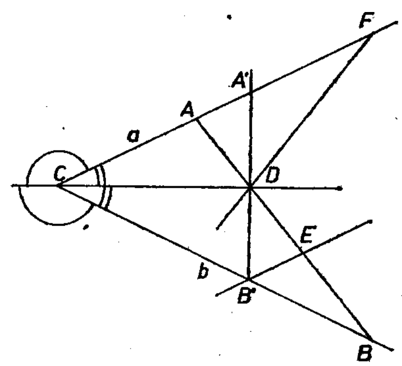
I. megoldás. Legyen a szög csúcsa C, a fölmért a, b szakasz végpontja rendre A, B, a szögfelező metszéspontja az AB egyenessel D, a D-ben CD-re állított merőlegesnek CA-n és CB-n levő pontja A', ill. B', végül $CA' = CB' = h^*$.



Elég az $a < b$ esettel foglalkoznunk, hiszen $a = b$ esetén (1)-ből $h = a$, másrészt ekkor A' azonos A-val, az állítás helyessége nyilvánvaló.

$a < b$ esetén B' a CB szakaszon, A' pedig CA meghosszabbításán adódik, mert az ABC háromszögből

$$DAC\sphericalangle = BAC\sphericalangle > ABC\sphericalangle = DBC\sphericalangle,$$

így pedig, $ACD\sphericalangle = DCB\sphericalangle$ és $A'B' \perp CD$ miatt

$$CDA\sphericalangle < CDB\sphericalangle, \text{ vagyis}$$
$$CDA\sphericalangle < CDA'\sphericalangle = 90^\circ = CDB'\sphericalangle < CDB\sphericalangle,$$

ami állításunkat bizonyítja.

Tükrözzük a CA egyenest a D pontra, ekkor A' képe B', A képe pedig legyen E. Így $B'E \parallel CA$, és a $BB'E$, BCA hasonló helyzetű háromszögpárból

$$B'E : CA = A'A : CA = B'B : CB,$$
$$(h^* - a) : a = (b - h^*) : b, \text{ végül}$$
$$h^* = \frac{2ab}{a+b} = h,$$

vagyis a szerkesztett szakasz egyenlő hosszú a keresett szakasszal. Ezt kellett bizonyítanunk.

(Ha a kiindulási ACB szöget konkávnak tekintjük, akkor felező félegyenesének C-n túli meghosszabbításán kapjuk D-t, mert az AB szakasz a kiegészítő konvex szögtartományban halad.)

Kovács Klára (Budapest, Apáczai Csere J. Gyak. Isk., 8. o. t.)

II. megoldás. Tovább is a fenti jelöléseket használjuk. Legyen B-nek CD-re való tükörképe (a CA félegyenesen) F. Ekkor

$$FDA'\sphericalangle = BDB'\sphericalangle = ADA'\sphericalangle,$$

tehát DA' felezi az ADF szöget, így a szögfelező osztásarányának tételét a DAF és CAB háromszögekre alkalmazva a fenti aránypár más alakját kapjuk:

$$AA' : A'F = \mathbf{AA'} : \mathbf{B'B} = AD : DF = AD : DB = \mathbf{CA} : \mathbf{CB}.$$

Mónus Ferenc (Hódmezővásárhely, Bethlen G. Gimn., I. o. t.)