

I. megoldás. Az adott számot így alakíthatjuk:

$$\begin{aligned}\sqrt{2\sqrt{3}-3} &= \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}(4-2\sqrt{3})} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-1)^2} = \\ &= (\sqrt{3}-1)\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}} = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{4}}} - \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\frac{27}{4}} - \sqrt[4]{\frac{3}{4}},\end{aligned}$$

és ezt kellett megmutatnunk. A kérdéses racionális számok $a = 27/4$, $b = 3/4$.

II. megoldás. Azt kell belátnunk, hogy a

$$(3) \quad \sqrt{2\sqrt{3}-3} = \sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}$$

egyenletnek van racionális megoldása. Négyzetreemeléssel

$$(4) \quad 2\sqrt{3}-3 = \sqrt{a} + \sqrt{b} - 2\sqrt{ab}.$$

Próbáljuk meg, van-e megoldás a következő szétválasztással:

$$(5) \quad \begin{aligned} \sqrt{a} + \sqrt{b} &= 2\sqrt{3}, \\ 2\sqrt[4]{ab} &= 3, \quad \text{azaz} \quad \sqrt{ab} = 9/4. \end{aligned}$$

Innen $\sqrt{a}$ és $\sqrt{b}$ a következő egyenlet gyökei:

$$t^2 - 2\sqrt{3}t + \frac{9}{4} = 0, \quad \text{azaz} \quad t_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad t_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

és mivel (3) mindkét oldala pozitív, $a > b$, azért

$$\sqrt{a} = t_2, \quad a = t_2^2 = \frac{27}{4}, \quad b = \frac{3}{4}, \text{ racionális számok.}$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Gulyás Imre (Budapest, Piarista gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Célhoz érünk az ismert¹

$$\sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} - \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

azonosság alapján is, ezt az (1)-nek

$$\sqrt{2\sqrt{3}-3} = \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

átalakításában adódott második tényezőre alkalmazva, ugyanis $A = 2$, $B = 3$ esetén $A^2 - B = 1$, teljes négyzet.

Tóth Ágnes (Budapest, Berzsenyi D. gimn., I. o. t.)

¹Lásd pl. *Faragó László*: Matematika szakköri feladatgyűjtemény, 3. kiadás, Középiskolai Szakköri Füzetek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1963, 14. o. 80. feladat.