

I. Megoldás. a) Az első kifejezés értelmezve van a valós számok körében, ha y bármilyen pozitív, negatív szám, vagy 0, továbbá $x \geq y^2$. Így ugyanis a nagy négyzetgyökök alatt álló számok sem negatívak, hiszen mindegyik egy-egy valós szám négyzete:

$$x \pm 2y\sqrt{x-y^2} = (x-y^2) \pm 2y\sqrt{x-y^2} + y^2 = (y \pm \sqrt{x-y^2})^2.$$

Ennélfogva kifejezésünk így írható:

$$K = |y + \sqrt{x-y^2}| + |y - \sqrt{x-y^2}|.$$

Észrevesszük azt is, hogy y helyére $-y$ -t írva K értéke változatlan marad, hiszen csupán fölcserélődik két tagjának értéke; más szóval: K csupán $|y|$ -étől függ. Mármint $|y|$ és $\sqrt{x-y^2}$ nagyságviszonya szerint K értéke kétféleképpen alakulhat:

$$\text{I.} \quad \text{ha } \sqrt{x-y^2} \leq |y|, \quad \text{azaz ha } x \leq 2y^2 \text{ (és } x \geq y^2), \text{ akkor}$$

$$K = (|y| + \sqrt{x-y^2}) + (|y| - \sqrt{x-y^2}) = 2 \cdot |y|;$$

ha pedig

$$\text{II.} \quad |y| < \sqrt{x-y^2}, \text{ azaz ha } x > 2y^2, \text{ akkor}$$

$$K = (|y| + \sqrt{x-y^2}) + (\sqrt{x-y^2} - |y|) = 2\sqrt{x-y^2}.$$

Más szóval K az $|y|$ és $\sqrt{x-y^2}$ kifejezések nagyobbikának 2-szeresével egyenlő.

b) A második kifejezés minden (valós) x, y, z szám esetén értelmezve van. Az N nevező négyzetét kifejtve

$$N^2 = (1+x^2)(1+y^2)(1+z^2) = 1 + (x^2+y^2+z^2) + (x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) + x^2y^2z^2.$$

A két zárójeles kifejezés a föltevés alapján így alakítható át:

$$x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) = (x+y+z)^2 - 2,$$

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 = (xy+yz+zx)^2 - 2(xy^2z+xyz^2+x^2yz) = 1 - 2xyz(x+y+z),$$

ennélfogva

$$N^2 = (x+y+z)^2 - 2xyz(x+y+z) + x^2y^2z^2 = (x+y+z-xyz)^2,$$

$$L = \frac{2xyz}{|x+y+z-xyz|}.$$

Fodor Péter (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., I. o. t.)

II. megoldás a b) kifejezésre. Célhoz érhetünk úgy is, hogy a feltételi összefüggésből az egyik változót kifejezzük és L -be helyettesítjük; pl.

$$(1) \quad z = \frac{1-xy}{x+y}.$$

Itt a nevező nem lehet 0, azaz $y \neq -x$, mert különben a feltevés szerint $-x^2 = 1$ kellene hogy legyen, ami pedig lehetetlen. (1) alapján

$$1+z^2 = \frac{(x+y)^2 + (1-xy)^2}{(x+y)^2} = \frac{x^2+y^2+1+x^2y^2}{(x+y)^2} = \frac{(1+x^2)(1+y^2)}{(x+y)^2},$$

így

$$L = \frac{2xy(1-xy)}{(x+y) \cdot \frac{(1+x^2)(1+y^2)}{|x+y|}} = \varepsilon \cdot \frac{2xy(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)},$$

$$x+y \neq 0,$$

ahol $\varepsilon = 1$ vagy -1 aszerint, hogy $x+y$ pozitív vagy negatív.

Megjegyzések. 1. Meg lehet mutatni, hogy a b) részben $x+z$ és $y+z$ ugyanolyan előjelű, mint $x+y$.

2. Az előjel meggondolásának szükségessége abból is adódik, hogy a feltevés az x, y, z számhármassal együtt a $-x, -y, -z$ számhármassra is teljesül, viszont L értéke ugyanezzel a helyettesítéssel a -1 -szeresére változik.