a) Legyen a két törtszám x és y, a második követelményben szereplő pozitív egész számok pedig A és B, vagyis

$$x = A\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{70}\right)=\frac{4}{35}\cdot A, \quad y=\frac{4}{35}\cdot B. \tag{1}$$

Ekkor az első követelmény szerint

$$x+y=\frac{4}{35}(A+B)=8,$$

$$A+B=70. \tag{2}$$

Számaink sorrendjére nem vagyunk tekintettel, így elég azokat a megoldásokat keresnünk, amelyekben pl. $x \le y$, vagyis $A \le B$. Ekkor A fölveheti az $1, 2, \ldots, 35$ értékeket, B értéke pedig rendre $70-A=69, 68, \ldots, 35$. Így (1) szerint 35 a követelményt kielégítő x, y tört-pár van. Nem zártuk ki az $A=B=35$ értéket, amikor $x=y=4$, mert az egész számok is a törtek közé tartoznak. Megfelelnek pl.

$$A=1 \quad \text{esetén} \quad \frac{4}{35} \quad \text{és} \quad \frac{276}{35}; \qquad A=20 \quad \text{esetén} \quad \frac{16}{7} \quad \text{és} \quad \frac{40}{7}.$$

b) Az újabb követelmény az előbbi kettőhöz csatlakozik, ennélfogva a megoldásokat a fentiek közül válogathatjuk ki, pl. a fenti második számpélda két tagja a $\frac{8}{7}$ áltörtnek 2-szerese, ill. 5-szöröse, tehát megfelel.

Legyen a kérdéses áltört $r(>1)$, és

$$x=C\cdot r, \quad y=D\cdot r,$$

ahol C és D az 1-nél nagyobb természetes számok. Ekkor egyrészt

$$x+y=(C+D)r=8, \tag{3}$$

$$C+D=\frac{8}{r}<8,$$

másrészt

$$\frac{x}{y}=\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{a}{b},$$

itt $\frac{a}{b}$ az $\frac{A}{B}$ és $\frac{C}{D}$ törtek legegyszerűbb alakja, $A=k\cdot a$, $B=k\cdot b$, és k az A, B számok legnagyobb közös osztója, továbbá $C\ge a$, $D \ge b$.

Ezeket (2)-be és (3)-ba beírva

$$k(a+b)=70, \qquad a+b=\frac{70}{k}\le C+D<8,$$

tehát k a $\frac{70}{8}$-nál nagyobb természetes szám, és osztója 70-nek. Mivel még $k\le ka=A\le 35$, azért k csak 10, 14 és 35 lehet, továbbá $a\le \frac{35}{k}$.

Ezek szerint k, majd a értékét megválasztva A, B, b és $a+b$ szóba jövő értékeire a következőket kapjuk:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
k	10	10	10	14	14	35
a	1	2	3	1	2	1
A	10	20	30	14	28	35
B	60	50	40	56	42	35
b	6	5	4	4	3	1
$a+b$	7	7	7	5	5	2

Az I–V. értékrendszerekben (3) miatt $C=a$ és $D=b$, így azonban I-ben és IV-ben nem teljesül $C>1$. A II. és III., valamint az V. értékrendszerben a kérdéses áltört

$$r=\frac{8}{C+D}=\frac{8}{7}, \quad \text{ill.} \quad \frac{8}{5}.$$

A VI. értékrendszerben $A=B$ miatt $C=D=2$, x és y közös értéke 4, és ez előállítható a $2/1$ áltörtből.

Mindezek szerint az újabb követelménynek eleget tevő tört-párok:

$$\frac{16}{7} \quad \text{és} \quad \frac{40}{7}, \qquad \frac{24}{7} \quad \text{és} \quad \frac{32}{7}, \qquad \frac{16}{5} \quad \text{és} \quad \frac{24}{5}, \qquad \frac{4}{1} \quad \text{és} \quad \frac{4}{1}.$$

Kálmán Miklós (Budapest, Fazekas M. gyak. gimn. II. o. t.)