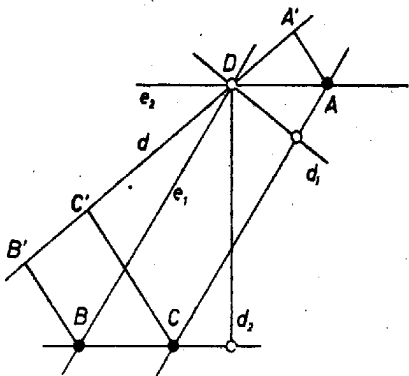


**I. megoldás.** Szerkesztésünket az adott három ponttal meghatározott  $S$  síkban végezzük. Legyen  $D$  a sík egy az előírt tulajdonsággal bíró pontja, és tekintsük a rajta átmenő egyenesek közül azt, amelyik merőleges az  $AC$  egyenesre; legyen ez  $d_1$ . Ekkor  $A$  és  $C$  merőleges vetülete azonos  $d_1$  és az  $AC$  egyenes metszéspontjával, így (1) szerint  $DB' = 0$ . Ez azt jelenti, hogy  $B$  vetülete  $d_1$ -re  $D$ , vagyis  $BD \perp d_1 \perp AC$ , tehát  $D$  csak az  $AC$ -vel  $B$ -n át húzott  $e_1$  párhuzamos egyenes valamely pontja lehet.



1. ábra

Ugyanígy adódik a  $D$ -n átmenő és  $BC$ -re merőleges  $d_2$  egyenes felhasználásával, hogy  $D$  csak a  $BC$ -vel  $A$ -n át húzott  $e_2$  párhuzamos egyenes pontja lehet.  $e_1$  és  $e_2$  különbözők, mert  $A, B, C$  háromszöget alkotnak, tehát egyetlen közös pontjuk van, az, amely az adott pontokat olyan paralelogrammává egészíti ki, melyben  $CD$  átló.

Megmutatjuk, hogy (1) teljesül bármely a  $D$ -n átmenő ( $S$ -beli)  $d$  egyenesre. Valóban, mivel  $BC$  párhuzamos, egyirányú és egyenlő  $DA$ -val, azért ugyanezek fennállnak  $B'C'$  és  $DA'$  között. Így az irányokat is figyelembe véve mindig fennáll

$$DA' = B'C' = B'D + DC' = -DB' + DC',$$

amihez mindkét oldalon hozzáadva a  $DB'$  vektort, (1)-et kapjuk.

Papp Zoltán (Debrecen, Fazekas M. g. II. o. t.)

**II. megoldás.** Legyen ismét  $D$  egy a kívánt tulajdonsággal bíró pont,  $d$  egy rajta átmenő egyenes, továbbá  $\overrightarrow{DA} = \mathbf{a}$ ,  $\overrightarrow{DB} = \mathbf{b}$ ,  $\overrightarrow{DC} = \mathbf{c}$ , és bontsuk fel az (1)-ben fellépő vektorokat 2-2 vektor összegére

$$\overrightarrow{DC'} = \mathbf{c} + \overrightarrow{CC'}, \quad \overrightarrow{DA'} = \mathbf{a} + \overrightarrow{AA'}, \quad \overrightarrow{DB'} = \mathbf{b} + \overrightarrow{BB'}.$$

Ezekkel teljesül (1), amiből átrendezéssel

$$(2) \quad \overrightarrow{CC'} - \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{BB'} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}.$$

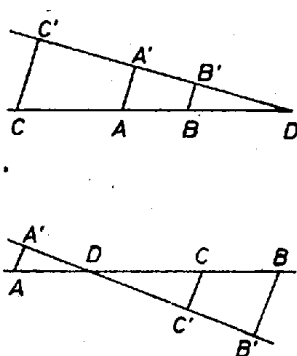
A  $d$  egyenest  $D$  körül forgatva ennek a vektoregyenlőségnek a jobb oldala állandó, a bal oldal viszont változó; hiszen mindig merőleges  $d$ -re. Ez az ellentmondás csak úgy oldódik fel, ha a bal oldal 0-vektor, csak így marad állandó, irányának megváltozása ellenére. Ekkor viszont a jobb oldalra is fennáll

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{0}, \text{ átrendezve } \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \text{ azaz } \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}.$$

Ezt a bármely  $D$  pontra fennálló  $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$  egyenlőségekkel egybevetve  $D$  csak olyan pont lehet, melyre  $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC}$  és  $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC}$ , vagyis  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$  és  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA}$ , tehát  $D$  az  $A, C, B$  pontokat paralelogrammává kiegészítő pont, ha a paralelogrammában  $CD, AB$  az átlók.

Csobádi Péter (Budapest, Berzsenyi D. g. II. o. t.)

*Megjegyzések.* 1. Szerkesztésünk akkor is érvényes, ha  $A, B, C$  egy egyenesbe esnek, ekkor azonban (1) lényegében semmitmondó (2. ábra).



*2. ábra*

2. Akkor is érvényes (1), ha mindhárom pont vetítése egymással párhuzamosan történik a felvett egyeneshez tetszés szerinti szöggel hajló irányban.

3. Be lehet látni, hogy bizonyításunk a  $D$ -n átmenő, de nem az  $ABC$  síkban fekvő egyenesekre is érvényes.