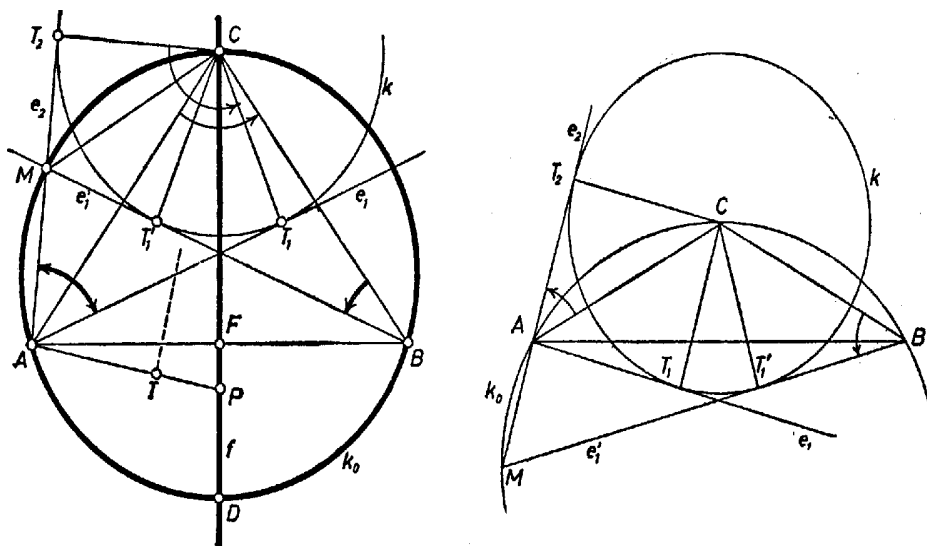


Legyen az ABC háromszögben $AC = BC$, AB felezőpontja F , egy a C körül $r = CA$ sugárral írt kör k . Ez az alakzat szimmetrikus az AB alap f felező merőlegesére nézve, így k -nak A -ból és B -ből húzott érintői egymásnak az f tengelyre vonatkozó tükörképei. $r = CA$ esetén csak egy-egy érintő húzható ($r > CA$ esetén a kérdés tárgytalan).



A tükrös érintőpárok f -en metszik egymást, ill. az egyik pár párhuzamos, ha $r = AF$, ha pedig $r = CF$, akkor egy érintőpár egybeesik. $CF = AF$ esetén a két kivételes eset egyszerre jön létre.

Fordítva, f -nek minden, az F -től és C -től különböző P pontja a mértani helyhez tartozik, ti. akkor adódik P , amikor $r = CT$, ahol T a C -nek PA -n levő vetülete; ekkor ugyanis $CT \leq CA$, másrészt PA nem azonos f -re vett PB tükörképével, így P valóságos metszéspont. F a fenti 2. eset miatt nem felel meg P -ként, $P = C$ viszont $r = 0$ -ra vezetne.

Legyen most $r < CA$, így az A -ból k -hoz húzott e_1, e_2 érintők különbözők, legyen érintési pontjuk T_1 , ill. T_2 , az e_1 -nek f -re való tükörképe e'_1 – ez átmegy B -n és T'_1 -ben érinti k -t –, végül e_2 és e'_1 metszéspontja M . Megmutatjuk, hogy M rajta van az ABC háromszög köré írt k_0 körön.

Forgassuk el az ábrát C körül úgy, hogy A képe B legyen. Ekkor e_2 képe e'_1 , ugyanis e_2 abba a B -ből húzott érintőbe megy át, amibe ugyanolyan forgatás viszi át BC -t, mint amilyen AC átvihető e_2 -be. De e_2 -t e'_1 -be az AC -re, majd f -re való tükrözéssel is átvihetjük; ezek során AC helybenmarad, majd BC -be megy át, az őt e_2 -be vivő forgás nagysága nem változik, a forgás iránya pedig kétszer az ellenkezőjére változik, így az AC -t e_2 -be és BC -t e'_1 -be vivő (egyik) forgás irányra is megegyezik. Mivel T_2 -t a forgatás T'_1 -be viszi át, így tehát a $T_2AC \sphericalangle$ és $T'_1BC \sphericalangle$ egyenlő, forgási irányra nézve is.

Ha M az AB egyenes ugyanazon oldalán van, mint C , akkor MC A -ból és B -ből egyenlő szögben látszik, ha pedig M és C az AB egyenes ellenkező oldalán van, akkor az $ACBM$ négyszög A és B csúcsának egyikénél levő belső szög a másikonál levő külső szöggel egyenlő. A négyszög tehát húrnégyszög. Így M mindkét esetben rajta van az ABC háromszög köré írt körön, k_0 -on. Ez nyilvánvalóan igaz akkor is, ha M egybeesik A -val, ill. B -vel ($r = CF$).

Fordítva, k_0 bármely M pontja az utóbbi módon hozzátartozik a keresett mértani helyhez, kivéve C -t. Ugyanis az MA, MB egyenesek közti egyik szög felezője az MC egyenes, hiszen C felezi k_0 -nak A és B közti egyik ívét. Eszerint van olyan C középi k kör, melynek érintői MA és MB . Nyilvánvalóan maga az A és B pont is hozzátartozik a mértani helyhez; a C -vel átellenes D pont ezen az úton nem adódik ki ($r = CA$ esetén csak egy-egy érintő van, és ezek egymás képei f -re), viszont f révén hozzátartozik a mértani helyhez.

Mindezek szerint a keresett mértani helyet k_0 és f alkotja a C és F pont kivételével.

Zambó Péter (Miskolc, Földes F. gimn. II. o. t.)
Hárs László (Budapest, Kölcsey F. gimn. II. o. t.)