I. Legyen a kérdéses felbontások tagjaiból képezett, az előírásnak megfelelő felsorolás (számsorozat) középső – ötödik – tagja a és a szomszédos tagok különbsége d (úgy értve, hogy mindig pl. a később álló tagból vonjuk ki az előtte állót). Ekkor a felsorolás tagjai

$$(1)\qquad a-4d,\quad a-3d,\quad a-2d,\quad a-d,\quad a,\quad a+d,\quad a+2d,\quad a+3d,\quad a+4d.$$

Nevezzük d együtthatóját az illető tag indexének.

A 9 tag összege $9a$, és ez egyenlő a felbontandó számok összegével, $19+28+ +37=84$-gyel, innen $a=28/3$. Legyen a 19, 28, 37 felbontásából eredő 3–3 tag indexének összege rendre s_1, s_2, s_3, így e tagok összege rendre $3a+s_1d$, $3a+s_2d$, ill. $3a+s_3d$, tehát

$$(2)\qquad 28+s_1d=19,\qquad 28+s_2d=28,\qquad 28+s_3d=37,\quad \text{amiből}$$

$$(3)\qquad s_2=0,\quad s_1=-s_3\neq 0,\ \text{és}$$

$$(4)\qquad d=9/s_3.$$

Ezek szerint, ha a 9 indexet úgy rendezzük 3 háromtagú csoportba, hogy a 3 index összege egyik csoportban 0, egy másikban pedig 0-tól különböző – amikor persze a hátra levő csoportban az utóbbi összeg (-1)-szerese az összeg, hiszen a 9 index összege 0, – akkor a 0-tól különböző összeget s_3-nak véve és kiszámítva (4)-ből a közös különbséget, majd (1) tagjait, (2) szerint az s_3 összegű indexhármashoz tartozó 3 tagja a felsorolásnak 37-et ad összegül, a 0-összeget adó indexhármashoz tartozók 28-at, a maradó 3 tag pedig 19-et. Pl. a

$$(5)\qquad -3,\ 0,\ 3\quad (s_2),\qquad 1,\ 2,\ 4\quad (s_3),\qquad -4,\ -2,\ -1\quad (s_1)$$

index-elrendezés megfelel (3)-nak, $d=9/(1+2+4)=9/7$, és a felsorolás tagjai (közös nevezőre hozva), majd számaink felbontásai:

$$(6)\qquad \frac{88}{21},\quad \frac{115}{21},\quad \frac{142}{21},\quad \frac{169}{21},\quad \frac{196}{21},\quad \frac{223}{21}\quad \frac{250}{21},\quad \frac{277}{21},\quad \frac{304}{21},$$

$$(7)\qquad 19=\frac{88}{21}+\frac{142}{21}+\frac{169}{21},\quad 28=\frac{115}{21}+\frac{196}{21}+\frac{277}{21},\quad 37=\frac{223}{21}+\frac{250}{21}+\frac{304}{21},$$

Ha (5) utolsó csoportját vesszük s_3 nak, $d=-9/7$, a (6) felsorolás és a (7) felbontások tagjait fordított sorrendben kapjuk, ez azonban nem tekintendő új megoldásnak. (6)-ra vezet az indexek következőkét csoportosítása is:

$$-3,\ 1,\ 2;\quad 0,\ 3,\ 4;\quad -4,\ -2,\ -1\quad \text{és}\quad -2,\ -1,\ 3;\quad 1,\ 2,\ 4;\quad -4,\ -3,\ 0.$$

II. A felbontások számának megállapításához nincs szükség a 9 index minden lehetséges elrendezésének felírására, elég előállítani a 0-összegű, s_2-ként felhasználandó indexhármasokat. Könnyű belátni, hogy ezek a következők:

$$(8)\qquad \begin{array}{llll} (-4,\ 0,\ 4), & (-3,\ \ 0,\ 3), & (-2,\ 0,\ 2), & (-1,\ \ 0,\ 1),\\ (-4,\ 1,\ 3), & (-3,\ -1,\ 4), & (-3,\ 1,\ 2), & (-2,\ -1,\ 3), \end{array}$$

számuk 8. Ugyanis bármelyikükből kiindulva a második, s_3-ként felhasználandó indexhármast – mint alább megmutatjuk – a maradó 6 indexből 20-féleképpen állíthatjuk össze, amivel az elrendezést is meghatároztuk, s_1 tagjai a föl nem használt indexek lesznek. Az így gondolható $8\cdot 20=160$ csoportosítás közül azonban nem adnak megoldást, (1) alakú felsorolást azok, amelyekben $s_3=0$, vagyis $s_1=s_2=s_3=0$. A (8) hármasokból lényegében két ilyen csoportosítás képezhető:

$$(9)\qquad \begin{array}{rlll} & (-4,\ 0,\ 4), & (-3,\ 1,\ 2), & (-2,\ -1,\ 3);\\ \text{és} & (-2,\ 0,\ 2), & (-4,\ 1,\ 3), & (-3,\ -1,\ 4). \end{array}$$

(A 0 index miatt (8) első sora valamelyik hármasának szerepelnie kell, viszont a $(-3,\ 0,\ 3)$ és $(-1,\ 0,\ 1)$ hármasoknak mindegyik további hármassal van közös indexe, ezért $s_1=s_2=s_3$ típusú elrendezésben nem léphetnek fel.) A (9) elrendezések mindegyike $3\cdot 2=6$ különböző sorrendben lép fel a fenti 160 csoportosításban aszerint, hogy a 3 hármas melyike kapja s_2, ill. s_3 szerepét: s_2-t 3-féleképpen, s_3-at 2-féleképpen választhatjuk.

Ezek szerint a 9 indexnek $160-2\cdot 6=148$ elrendezésében teljesül a (3) föltétel. Ezek – a bemutatott példa szerint – páronként ugyanazt a felbontást adják a 19, 28, 37 számokra, így a kívánt felbontások száma 74.

III. Hátra van még annak belátása, hogy 6 különböző index közül valóban 20-féleképpen választhatjuk s_3 tagjait. Az elsőt 6-féleképpen, a maradók közül a másodikat 5-, a harmadikat 4-féleképpen, és mindegyik utóbbi megválasztás az előbbiek mindegyikével összekapcsolható. Az így adódó $6\cdot 5\cdot 4=120$ lehetőségben azonban minden egyes számhármast 6-szor vettünk figyelembe, ahány különböző sorrendben 3 különböző elem felírható – amint ezt a (9)-hez fűzött meggondolásban láttuk –, ezért a csupán sorrendi különbözőségektől eltekintve valóban $120:6=20$ a keresett szám.

IV. A 6, 72, 48 számok felbontásainak számát hasonlóan kereshetjük. Minden felsorolás középső tagja $(6+72+48)/9=14$. Ekkor

$$(2') \qquad 42+s_1d=6, \qquad 42+s_2d=72, \qquad 42+s_3d=48,$$

így (3) helyére a következő föltétel lép:

$$(3') \qquad s_1:s_2:s_3=(-6):5:1.$$

A legkisebb három index összege $(-4)+(-3)+(-2)=-9$, a legnagyobb håromé 9, így $|s_1|$, $|s_2|$, $|s_3|\le 9$, ezért lényegében csak $s_1=-6$, $s_2=5$, $s_3=1$ lehetséges, hiszen láttuk, hogy mindegyik indexösszegnek (-1)-gyel való szorzása csak sorrendi változást okoz a felbontásokban. Ekkor $d=6$, számainkat csak a

$$(10) \qquad -10, \quad -4, \quad 2, \quad 8, \quad 14, \quad 20, \quad 26, \quad 32, \quad 38$$

felsorolás számaiból állíthatjuk elő. Mármost kevés próbálgatás mutatja, hogy a következő 6 index elrendezés ad megoldást:

s_1 (6 felbontása)	s_2 (72 felbontása)	s_3 (48 felbontása)
$(-4,\ -3,\ 1)$	$(-2,\ 3,\ 4)$	$(-1,\ 0,\ 2)$,
$(-4,\ -3,\ 1)$	$(-1,\ 2,\ 4)$	$(-2,\ 0,\ 3)$,
$(-4,\ -3,\ 1)$	$(0,\ 2,\ 3)$	$(-2,\ -1,\ 4)$,
$(-4,\ -2,\ 0)$	$(-1,\ 2,\ 4)$	$(-3,\ 1,\ 3)$,
$(-3,\ -2,\ -1)$	$(0,\ 1,\ 4)$	$(-4,\ 2,\ 3)$,
$(-3,\ -2,\ -1)$	$(0,\ 2,\ 3)$	$(-4,\ 1,\ 4)$,

vagyis a megoldások száma 6. Pl. a negyedik sor szerint (10)-ből:

$$6=(-10)+2+14, \qquad 72=8+26+38, \qquad 48=(-4)+20+32.$$

Koren András (Budapest, I. István g. III. o. t.)
Zöldy Béla (Budapest, I. István g. II. o. t.)
Simon Júlia (Győr, Kazinczy F. g. I. o. t.)

Megjegyzés. A nem teljes és a hibás dolgozatokban gyakori, hogy a szerző többletkövetelményt állít fel. Ilyenek: a felbontás tagjai egész számok; a felsorolás *első három* tagjának összege 19, a *következő háromé* 28; mivel az első számpéldában $28=(19+37)/2$, azért a másodikban is csak vagy 6, 27, 48 vagy 6, 42, 78 lehet a felbontandó számhármas. (Az utolsóknak tetszetős kiindulásával – hogy ti. 1–1 számjegy-cserével kaphatók az adott számhármasból – szemben áll, hogy ugyanaz lenne az eredmény, mint az első számpéldában, ti. 74 felbontás.) Mindezeket a feladat szövege nem támasztotta alá. Pl. az első számpéldában 9 különböző felsorolás számaiból adódhat ki 19, 28 és 37, de tagjaik közül egyetlenegy sem egész szám.