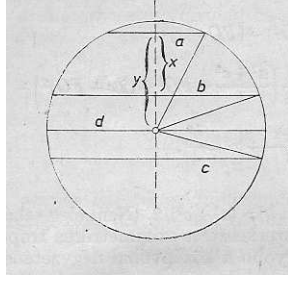


**I. megoldás.** 1. Ha  $a = c$ , akkor  $b$  átmérő és a szerkesztés magától értetődő. Ha  $a \neq c$ , válasszuk a betűzést úgy, hogy a két szélső húr közül  $a$  legyen a kisebbik:  $a < c$  (1. ábra).



1. ábra

Ekkor  $c$  közelebb van a velük párhuzamos  $d$  átmérőhöz, mint  $a$ , ezért  $b$  mindenesetre azon a partján van  $d$ -nek, mint  $a$ . Legyen  $a$  és  $b$  közti távolság  $x$ , az  $a$  és  $d$  közti távolság  $y$ , ekkor  $d$ -től a  $b$  húr  $y - x$ , a  $c$  húr pedig  $|y - 2x|$  távolságra van. Pitagorasz tétele alapján

$$(1) \quad \left(\frac{d}{2}\right)^2 = y^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

$$(2) \quad \left(\frac{d}{2}\right)^2 = (y-x)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

$$(3) \quad \left(\frac{d}{2}\right)^2 = (y - 2x)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

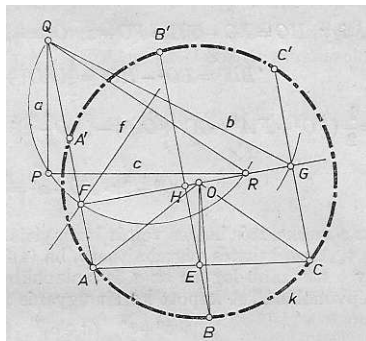
Innen  $y$ -t és  $d$ -t kiküszöbölhetjük úgy, hogy kivonjuk (1) és (3) összegéből (2) kétszeresét:

$$0 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + 2x^2 - 2\left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

$$(4) \quad 2x = \sqrt{b^2 - \frac{a^2 + c^2}{2}},$$

akkora az  $a$  és  $c$  húr távolsága.

2. A szerkesztés a következő.



2. ábra

Egy  $P$  csúcsú derékszög (2. ábra) két szárára felmérjük  $PQ = a$ , ill.  $PR = c$  szakaszt, a  $QR$  szakasz fölé Thalész-félkört írunk, kijelöljük rajta a szakasz  $f$  felező merőlegesen levő  $F$  pontot ( $f$ -et már a középpont szerkesztésében használtuk), az  $FR$  felegyenest metsszük a  $Q$  körüli  $b$  sugarú körrel a  $G$  pontban. Fölmérjük az  $FQ$  egyenesre az  $FA = FA' = a/2$ , valamint a vele párhuzamos,  $G$ -n átmenő egyenesre a  $GC = GC' = c/2$  szakaszt, ekkor a keresett  $k$  kör  $O$  középpontját az  $AC$  szakasz felező merőlegese metszi ki  $FG$ -ből, sugara pedig  $OA$ .

3. A szerkesztésből nyilvánvaló, hogy  $AA'$ ,  $CC'$  a  $k$ -nak párhuzamos és  $a$ , ill.  $c$  hosszúságú húrja, mert merőlegesek  $FG$ -re; azt kell csak bebizonyítanunk, hogy az  $AC$ -nek  $E$  felezőpontján át velük párhuzamosan húzott – és így  $FA$ -tól és  $GC$ -től egyenlő távolságra levő –  $e$  egyenes  $k$ -ból  $b$  hosszúságú hűrt metasz ki. Legyen a húr  $BB'$ , felezőpontja  $H$ .

A szerkesztés szerint  $QR^2 = a^2 + c^2$ ,  $QRF$  egyenlő szárú derékszögű háromszög, így  $QF^2 = (a^2 + c^2)/2$ , tehát  $FG = 2x$ , megfelel (4)-nek.  $O$  a  $HG$  félegyenese van, így  $HO = FO - FH = FO - x$ ,  $OG = |2x - FO|$ . Mármost

$$\begin{aligned} BH^2 &= BO^2 - HO^2 = \frac{1}{2}(AO^2 + CO^2) - (FO - x)^2 = \\ &= \frac{1}{2}(FO^2 + FA^2 + GC^2 + OG^2) - (FO - x)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2 + c^2}{4} + FO^2 + (2x - FO)^2\right) - \\ &\quad - FO^2 + 2x \cdot FO - x^2 = \frac{a^2 + c^2}{8} + x^2 = \frac{b^2}{4}, \end{aligned}$$

és ez a szerkesztés helyes voltát bizonyítja.

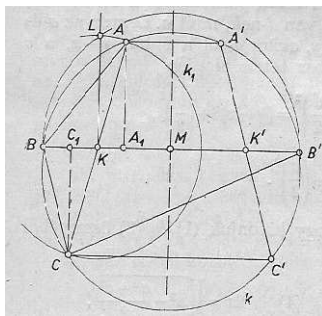
4. A szerkesztés végrehajtható, ha (4)-ben  $b^2 > (a^2 + c^2)/2$ . (Nem elég tehát, hogy  $b$  hosszabb legyen  $a$  és  $c$  alapokból szerkesztett szimmetrikus trapéz középvonalánál. A kapott korlát ugyanis nagyobb a középvonal négyzeténél:

$$\frac{a^2 + c^2}{2} - \left(\frac{a + c}{2}\right)^2 = \left(\frac{a - c}{2}\right)^2 \geq 0.$$

A feltétel teljesülése esetén 1 megoldást kapunk.

*Fuggert Endre* (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)

**II. megoldás.** 1. Legyenek a húrok rendre  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , és messe  $BB'$  az  $AC$ -t  $K$ -ban,  $A'C'$ -t  $K'$ -ben (3. ábra).



3. ábra

Az  $ABK$  és  $B'CK$  háromszögek hasonlóak, mert szögeik páronként egyenlők, így

$$(5) \quad \frac{BK}{KA} = \frac{CK}{KB'} = \frac{KA}{KB'}, \quad KA^2 = KB \cdot KB',$$

azaz  $KA$  mértani középarányos  $BK$  és  $KB'$  között. Másrészt  $KK'$  a  $CC'A'A$  trapéz középvonala, és az alakzat szimmetrikus a húrok közös felező merőlegesére, mint tengelyre nézve.

2. Ezek alapján a szerkesztés a következő. A  $BB' = b$  szakasz  $M$  felezőpontjától  $B$  felé fölmérjük az  $MA_1 = a/2$ ,  $MC_1 = c/2$  szakaszokat.  $A_1$ -ben és  $A_1C_1$ -nek  $K$  felezőpontjában merőlegest rajzolunk  $BB'$ -re és az utóbbit metsszük a  $BB'$  átmérő fölötti Thalesz-körrel az  $L$  pontban. Ekkor a  $K$  körüli,  $KL$  sugarú  $k_1$  kör az előbbi merőlegesből kimetszi  $A$ -t,  $AK$ -nak  $k_1$ -gyel való másik metszéspontja  $C$  és a keresett  $k$  kör az  $ABC$  háromszög köré írt kör.

3. Bizonyításul elég azt megmutatnunk, hogy  $k$  átmegy  $B'$ -n is. Ekkor ugyanis az  $M$ -ben  $BB'$ -re állított  $m$  merőleges szimmetriatengelye  $k$ -nak, ezért  $A$ -nak és  $C$ -nek  $m$ -re vetett  $A'$ , ill.  $C'$  tükörképe is rajta van  $k$ -n,  $AA'$  és  $CC'$  párhuzamosak  $BB'$ -vel, mert merőlegesek  $m$ -re,  $AA' = 2MA_1 = a$ ,  $CC' = 2MC_1 = c$  – ugyanis  $CC_1 \perp BB'$ , hiszen a  $CKC_1$  háromszög egybevágó az  $AKA_1$  derékszögű háromszöggel –, végül ugyanezért  $BB'$  egyenlő távolságra van  $AA'$ -től és  $CC'$ -től. – Állításunk abból következik, hogy  $KL = KA$  az ismert mértani középarányos szerkesztés miatt teljesíti (5) jobb oldali egyenlőségét, ezért a bal oldali egyenlőség is fennáll, így a  $K$ -nál egyenlő (csúcs-) szögekkel bíró  $KAB$ ,  $KCB'$  háromszögek hasonlóak,  $BB'C \sim BAC$ .

4. A szerkesztés végrehajtható, ha  $KL > KA_1$ , azaz – pozitív szakaszokról lévén szó –, ha  $KL^2 > KA_1^2$

$$\begin{aligned} KB \cdot KB' &= \left(\frac{b}{2} - \frac{a+c}{4}\right) \left(\frac{b}{2} + \frac{a+c}{4}\right) > KA_1^2 = \left(\frac{a+c}{4} - \frac{a}{2}\right)^2, \\ \frac{b^2}{4} - \left(\frac{a+c}{4}\right)^2 - \left(\frac{c-a}{4}\right)^2 &= \frac{1}{4} \left(b^2 - \frac{a^2 + c^2}{2}\right) > 0, \end{aligned}$$

ami azonos feltétel az I. megoldásban találttal. A feltétel teljesülése esetén egyetlen  $L$  és (lényegében egyetlen)  $A$  pontot kapunk.

*Greskovits József* (Budapest, Könyves Kálmán g. II. o. t.)