

I. Megoldás. Ha létezik a kívánt A, B, C, D számnégyes, akkor az a polinom-egyenlőség is azonosság, amit (1)-ből a jobb oldal nevezőjével való szorzás útján kapunk (ez a nevező ugyanis egyszersmind a bal oldali nevezők közös többszöröse, ezért a szorzás útján egész kifejezés adódik):

$$(1') \quad A(x+1)(x^2+x+1) + B(x^2+x+1) + (Cx+D)(x+1)^2 = 1,$$

x hatványai szerint rendezve

$$(1'') \quad (A+C)x^3 + (2A+B+2C+D)x^2 + (2A+B+C+2D)x + (A+B+D) = 1.$$

Eszerint a két oldalon x megfelelő hatványai ugyanavval az együtthatóval kell szerepeljenek, és az x -et nem tartalmazó tagoknak is egyenlőnek kell lenniük:

$$(2) \quad A + C = 0,$$

$$(3) \quad 2A + B + 2C + D = 0,$$

$$(4) \quad 2A + B + C + 2D = 0,$$

$$(5) \quad A + B + D = 1.$$

Vonjuk ki (3)-ból egyrészt (2) kétszeresét, másrészt (4)-et:

$$(6) \quad B + D = 0,$$

$$(7) \quad C - D = 0.$$

(5) és (6) alapján $A = 1$, így (2)-ből $C = -1$, (7)-ből $D = -1$, végül (6)-ból $B = 1$. Eszerint a kívánt számnégyes létezik, és (1) így lesz azonosság:

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+x+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Varga Katalin (Veszprém, Lovassy L. g. II. o. t.)

Megjegyzés. Úgy is kaphatunk egyenletrendszert az A, B, C, D számokra, (1')-ből, ha x helyére megengedett (azaz -1 -től különböző) számokat helyettesítünk. Könnyű a számítás, ha kicsi abszolút értékű egész számokat veszünk, legyen $x = 0, 1, 2$ és -2 (négy egyenletre van szükség):

$$(5) \quad A + B + D = 1,$$

$$(8) \quad 6A + 3B + 4C + 4D = 1,$$

$$(9) \quad 21A + 7B + 18C + 9D = 1,$$

$$(10) \quad -3A + 3B - 2C + D = 1.$$

Vonjuk ki (8)-ból (5) 4-szeresét, (9)-ből (5) 9-szeresét, és (10)-ből (5)-öt:

$$(11) \quad 2A - B + 4C = -3,$$

$$(12) \quad 12A - 2B + 18C = -8, \quad \text{azaz} \quad 6A - B + 9C = -4,$$

$$(13) \quad -4A + 2B - 2C = 0, \quad \text{azaz} \quad -2A + B - C = 0.$$

Adjuk hozzá (13)-at (11)-hez és (12)-höz: $3C = -3$, azaz $C = -1$, ill. $4A + 8C = 4A - 8 = -4$, $A = 1$, így (13)-ból $B = C + 2A = 1$ és (5)-ből $D = -1$.

Kövesi Gusztáv (Budapest, I. István g. II. o. t.)

Faragó István (Budapest, Könyves Kálmán g. II. o. t.)

II. Megoldás. Ha (1) fennáll, akkor

$$(14) \quad \frac{A}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} = \frac{1}{(x+1)^2(x^2+x+1)} - \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{1-B(x^2+x+1)}{(x+1)^2(x^2+x+1)}.$$

Ehhez az kell, hogy a jobb oldal $(x+1)(x^2+x+1)$ -gyel szorozva polinommá váljon, vagyis hogy egyszerűsíthető legyen $x+1$ -gyel. A számláló akkor alakítható $x+1$ és egy másik (elsőfokú) polinom szorzatává, ha értéke $x = -1$ esetén 0, hiszen így az $x+1$ tényező 0 lesz. Eszerint $1 - B \cdot 1 = 0$, $B = 1$. Valóban, így (14) jobb oldala

$$\frac{-x(x+1)}{(x+1)^2(x^2+x+1)} = \frac{-x}{(x+1)(x^2+x+1)}.$$

Hasonlóan, (14) első tagját a jobb oldalra véve

$$(15) \quad \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1} = \frac{-x}{(x+1)(x^2 + x + 1)} - \frac{A}{x+1} = \frac{-x - A(x^2 + x + 1)}{(x+1)(x^2 + x + 1)},$$

a jobb oldal számlálójának itt is 0-t kell adnia $x = -1$ esetén, ebből $A = 1$. Ezzel (15) így alakul

$$\frac{Cx + D}{x^2 + x + 1} = \frac{-(x^2 + 2x + 1)}{(x+1)(x^2 + x + 1)} = \frac{-x - 1}{x^2 + x + 1},$$

ami akkor áll fenn minden előírt x -re, ha $C = -1$, $D = -1$.

Megjegyzés. Ez a megoldás rávilágít annak az okára is, hogy *lehetséges* alkalmas A , B , C , D értéket találni. (A fent nyert egyenletrendszerek ugyanis – és minden más hasonlóan nyerhető egyenletrendszer is – lehetnének ellentmondók.)