

I. megoldás. Legyen az AB él felezőpontja E , a D csúcs tükörképe E -re F , és a CF szakasz felezőpontja G . Ekkor CE az ABC és DFC háromszögek közös súlyvonala, ezért S a közös súlypontjuk, továbbá DG is súlyvonala a CDF háromszögnek, így a DS egyenes átmegy G -n, és $DS = 2DG/3$. Legyen még D tükörképe G -re a H pont, C képe E -re J . Alkalmazzuk a 1040. gyakorlatban bebizonyított tételt¹ a $CDFH$, $ADBF$, $CDJF$ és $ACBJ$ paralelogrammákra:

$$(2) \quad DS^2 = \frac{4}{9}DG^2 = \frac{1}{9}DH^2 = \frac{1}{9}(2CD^2 + 2DF^2 - CF^2),$$

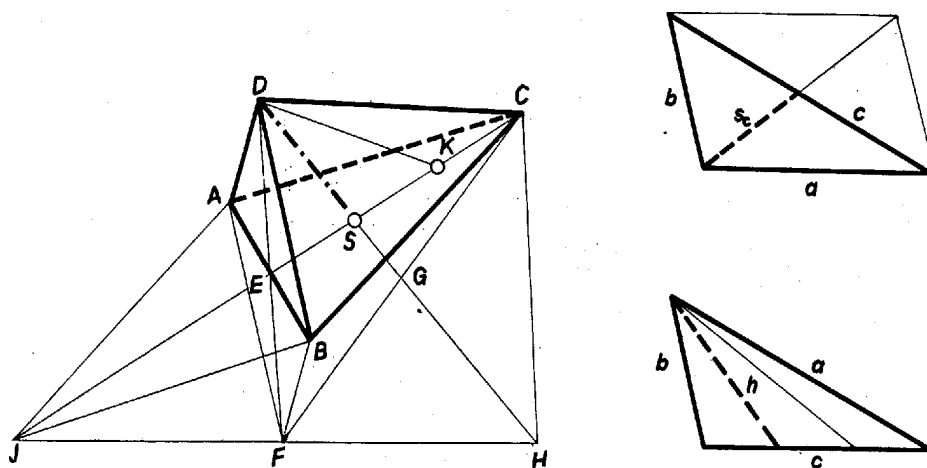
$$(3) \quad DF^2 = 2AD^2 + 2BD^2 - AB^2,$$

$$(4) \quad CF^2 = \frac{DF^2 + CJ^2}{2} - CD^2,$$

$$(5) \quad CJ^2 = 2AC^2 + 2BC^2 - AB^2,$$

és helyettesítsük (2)-be előbb (3)-at és (4)-et, majd (3)-at és (5)-öt. Így éppen a bizonyítandó (1) állítást kapjuk.

Michaletzky György (Budapest, Piarista g. II. o. t.)
Rigó Erzsébet (Kiskunfélegyháza, Móra F. g. II. o. t.)



II. megoldás. Legyen a CS szakasz felezőpontja K , így $KS = SE$, tehát DS a DEK háromszög súlyvonala, DK pedig a DCS háromszögé.

Az I. megoldásban idézett tételből adódik, hogy az a, b, c oldalú háromszög c oldalához tartozó s_c súlyvonalra, mint a paralelogrammává kiegészített háromszög átlójának felére, teljesül

$$s_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

Alkalmazzuk ezt a mondott két súlyvonalra; figyelembe véve, hogy $EK = SC = 2CE/3$.

$$(6) \quad DS^2 = \frac{2DE^2 + 2DK^2 - \frac{4CE^2}{9}}{4}$$

$$(7) \quad DK^2 = \frac{2DS^2 + 2DC^2 - \frac{4CE^2}{9}}{4}.$$

(7) felét (6)-hoz adva DK^2 kiesik, rendezéssel

$$(8) \quad DS^2 = \frac{2DE^2 + DC^2 - \frac{2CE^2}{3}}{3}.$$

DE az ABD , CE pedig az ABC háromszög súlyvonala, azért hasonlóan

$$DE^2 = \frac{2DA^2 + 2DB^2 - AB^2}{4}, \quad CE^2 = \frac{2AC^2 + 2BC^2 - AB^2}{4},$$

¹Paralelogramma átlójának négyzetösszege egyenlő oldalainak négyzetösszegével. K. M. L. 33 (1566) 152. o.

ezeket (8)-ba helyettesítve (1)-et kapjuk.

Feind Ferenc (Székesfehérvár, Teleki B. g. I. o. t.)

Szengofszky Oszkár (Budapest, Berzsenyi D. g. I. o. t.)

Megjegyzés. (8)-ban a c oldal b -hez közelebbi h harmadolójára ezt kaptuk:

$$h^2 = \frac{6b^2 + 3a^2 - 2c^2}{9}.$$