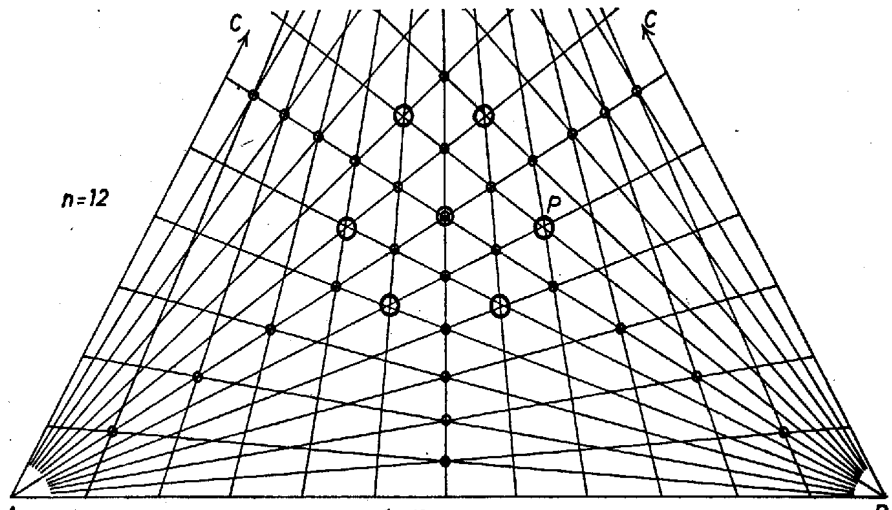
I. megoldás. I. Amikor az oldalakat 12–12 részre osztjuk, egyik-egyik csúcsból 11 összekötő szakasz indul ki – nevezzük ezeket transzverzálisoknak –, ezek egymás között nem adnak metszést. Viszont pl. egy az A csúcsból kiinduló transzverzális metszi a B-ből és C-ből kiinduló transzverzálisok mindegyikét. Így mindegyik csúcs-pár transzverzálisai 11^2 esetben metszik egymást, a 3 csúcspárt tekintve $3\cdot 11^2=363$ esetben. Minthogy azonban a transzverzálisok között szerepel a szabályos háromszög mindhárom szimmetriatengelye, és a tengelyre szimmetrikus transzverzálisok a tengelyen metszik egymást, azért mindegyik tengelyen a $2\cdot 11$ áthaladás csupán 11 metszéspontot ad, köztük a háromszög középpontját is, ahol a 3 tengely metszi egymást. Így $3(11-1)+1=31$ hármas metszést találtunk, ezeket a 363 metszésben 2-szer -2-szer fölöslegesen vettük számba.

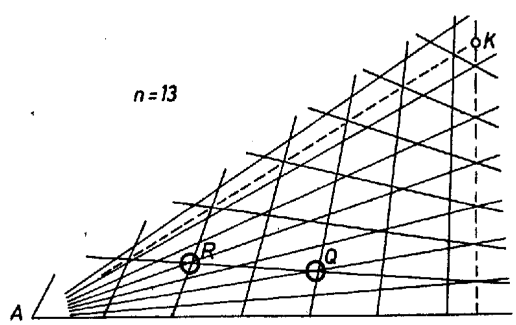


1. ábra

Nincs további olyan metszéspont, amelyen 3 transzverzális haladna át. Ugyanis csak 6 transzverzális-hármas esetében esnek a metszéspontok annyira közel egymáshoz (pl. az 1. ábra P-vel jelölt helyén), hogy – a természetesen adódó pontatlanság miatt – kétséges, három külön metszésről van-e szó, vagy egyetlen hármas metszésről; azonban a P hely környezetében éppen az 1437. feladatban vizsgált transzverzális-hármas halad át, a többi 5 pedig belőle tengelyes tükrözéssel vagy a háromszög $120°$-os elfordításával adódik, eszerint páronként különböző pontokban metszik egymást.

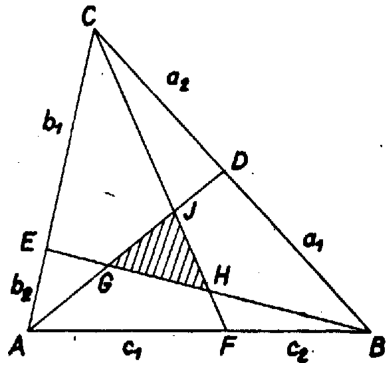
Eszerint a metszéspontok száma $363-2\cdot 31=301$.

II. Az oldalakat 13–13 egyenlő részre osztó transzverzálisok között nem szerepelnek a háromszög szimmetriatengelyei. 3-as metszés létezése csak a 2. ábra Q-val és R-rel jelölt helyein kétséges.



2. ábra

Ezeken a helyeken az 1437. feladathoz fűzött megjegyzés jelöléseivel (3. ábra) alkalmas egységben



3. ábra

	a_1	$a_2 = 13 - a_1$	b_1	$b_2 = 13 - b_1$	c_1	$c_2 = 13 - c_1$
Q	2	11	12	1	4	9
R	4	9	12	1	2	11

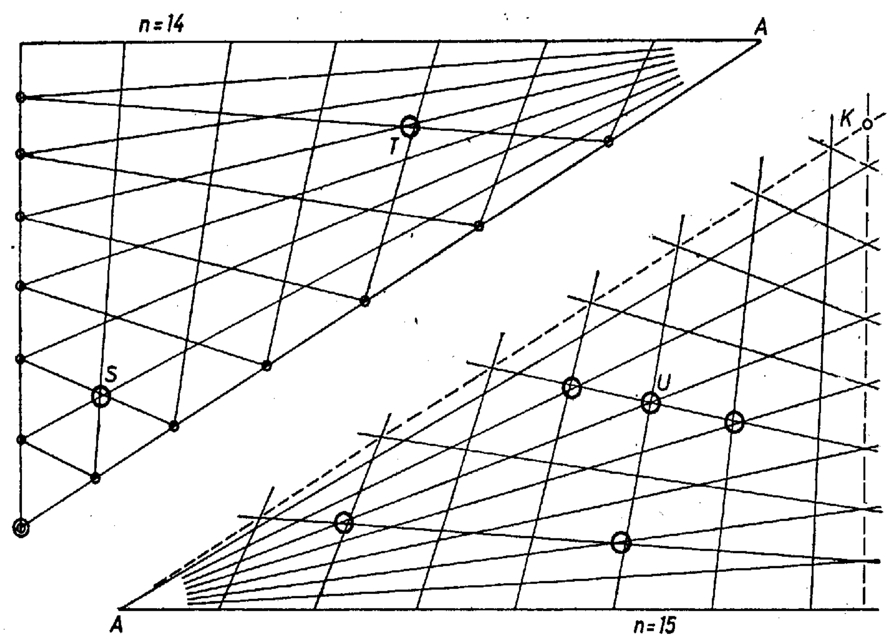
így az ugyanott nyert

$$\text{(1)} \qquad \frac{GHJ}{ABC} = \frac{(a_1b_1c_1 - a_2b_2c_2)^2}{(a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_2)(b_1c_1 + b_1c_2 + b_2c_2)(c_1a_1 + c_1a_2 + c_2a_2)}$$

területarány-képlet felhasználásával mind a két kérdéses transzverzális-hármasra $a_1b_1c_1 - a_2b_2c_2 = -3 \neq 0$, nincs hármas metszés.

Így a transzverzálisok a fenti meggondoláshoz hasonlóan $3(13-1)^2 = 432$ különböző metszéspontot határoznak meg.

III. A 14 részre osztás esete lényegében azonos a 12 részre osztás esetével, a metszéspontok száma $3(14-1)^2-2(3(14-2)+1) = 433$, ugyanis a 4. ábra S-sel és T-vel jelölt, kétséges helyén a transzverzális -hármasokra $a_1b_1c_1 - a_2b_2c_2 = 6\cdot 9\cdot 6 - 8\cdot 5\cdot 8 = 4$, ill. $3\cdot 13\cdot 3 - 11\cdot 1\cdot 11 = -4$, egyik sem 0.



4. ábra **5. ábra**

IV. A 15 részre osztás esete viszont a 13 részre osztás esetéhez hasonló. Itt azonban az 5. ábra U helyén a transzverzális-hármas egy pontban metszi egymást, ugyanis $a_1 = 5$, $a_2 = 10$, $b_1 = 12$, $b_2 = 3$, $c_1 = 5$, $c_2 = 10$, és így $a_1b_1c_1 - a_2b_2c_2 = 0$. (A többi jelölt helyen nincs hármas metszés.) Így a különböző metszéspontok száma $3(15-1)^2 - 2\cdot 6 = 576$.

Takács László (Sopron, Széchenyi I. g. III. o. t.)
Lőrincz András (Budapest, Kölcsey F. g. II. o. t.)

II. megoldás (vázlat). Célhoz érhetünk ábrák szemlélete nélkül, a hármas metszéspontok esetén teljesülő $a_1b_1c_1 = a_2b_2c_2$ feltétel alapján is. Az oldalanként keletkezett n egyenlő rész, azaz $n-1$ osztópont és transzverzális esetére a metszéspontok száma a fentiekhez hasonlóan

$$N = 3(n-1)^2 - 2H,$$

ahol H a hármas metszéspontok száma, más szóval az (1)-ből adódó

$$a_1b_1c_1 - (n-a_1)(n-b_1)(n-c_1) = 0, \tag{2}$$

más alakban

$$n^2 - (a_1+b_1+c_1)n + (a_1b_1+b_1c_1+c_1a_1) = \frac{2a_1b_1c_1}{n} \tag{3}$$

egyenletet kielégítő a_1, b_1, c_1 természetes számhármasok száma. A fentiek szerint páros n esetére a háromszög tengelyein levő hármas metszéspontok száma[1] $3(n-2)+1 = 3n-5$, a továbbiak 6-osával egymás szimmetrikus társai, ezért elég a

$$0 < a_1 < \frac{n}{2}, \qquad \frac{n}{2} < b_1 < n, \qquad 0 < c_1 < \frac{n}{2} \tag{4}$$

további korlátozásnak eleget tevő megoldásokat keresnünk, így minden 6-ost egyszer kapunk meg.

$n = 13$ esetén (3) jobb oldala nem lehet egész, mert 13 törzsszám (bal oldala viszont egész), nincs megoldás. Ugyanígy $n = 14 = 2\cdot 7$ esetén sem, mert a jobb oldal számlálójában (4) miatt nem léphet föl 7-tel osztható tényező.

$n = 12 = 2^2\cdot 3$ esetén $a_1b_1c_1$-nek oszthatónak kell lennie 6-tal, így (4)-re tekintettel a_1, b_1, c_1 közül egyiknek párosnak kell lennie és egy másiknak 3-mal oszthatónak. Az előbbi 2, 4, 8 vagy 10 lehet, az utóbbi 3 vagy 9. a_1 és c_1 szimmetrikus szerepére tekintettel a következő alakú számhármasok jönnek tekintetbe:

$$\begin{matrix} (2,\ 9,\ c_1), & (4,\ 9,\ c_1), & (3,\ 8,\ c_1), & (3,\ 10,\ c_1), \\ (2,\ b_1,\ 3), & (4,\ b_1,\ 3), & & \end{matrix}$$

de az ezekkel (2)-ből adódó

$$c_1 = \frac{n(n-a_1)(n-b_1)}{a_1b_1 + (n-a_1)(n-b_1)}, \qquad \text{ill.} \qquad b_1 = \frac{n(n-a_1)(n-c_1)}{a_1c_1 + (n-a_1)(n-c_1)}$$

egyik esetben sem egész.

Hasonlóan $n = 15 = 3\cdot 5$ esetén $a_1b_1c_1$-nek oszthatónak kell lennie 15-tel, (4)-re tekintettel egyik tényezőnek 3-mal, egy másiknak 5-tel kell oszthatónak lennie. A szóba jövő

$$\begin{matrix} (3,\ 10,\ c_1), & (6,\ 10,\ c_1), & (5,\ 9,\ c_1), & (5,\ 12,\ c_1), \\ (3,\ \ b_1,\ 5), & (6,\ \ b_1,\ 5) & & \end{matrix}$$

alakú számhármasok közül az elsővel (3)-ból $c_1 = 10$, ezt azonban (4)-ben kizártuk, a negyedikkel $c_1 = 5$ (az ebből és a kizárt (3, 10, 10) számhármasból adódó hármas metszéspontok egymás tükrös párjai a C-ből induló szimmetria-tengelyre. Eszerint $n = 15$ esetén 6 hármas metszéspont van.

Pataki János (Budapest, Berzsenyi D. g. I. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az 1437. feladathoz fűzött megjegyzés mutatja, hogy megállapításaink tetszés szerinti alakú háromszögben is érvényesek.

2. Néhányan megpróbálkoztak azon az ábrán megszámlálni a metszéspontokat, amely n vizsgált négy értéke esetének egyesítésével adódik, de lényegében csak részeredményeket értek el. Néhány olyan hármas metszéspont, amelyen különböző n-értékekhez tartozó transzverzálisok mennek át:

$$\begin{aligned} a_1 : a_2 &= 1 : 2, & b_1 : b_2 &= 11 : 2, & c_1 : c_2 &= 4 : 11; \\ &= 5 : 7, & &= \ \ 8 : 5, & &= 7 : \ \ 8; \\ &= 5 : 8, & &= \ \ 4 : 1, & &= 2 : \ \ 5. \end{aligned}$$

Az $a_1 : a_2 = 1 : 2$ osztópont $n = 12$ és $n = 15$ esetén is szerepel:

---

[1] Eszerint tetszés szerinti n esetén

$$N \le 3(n-1)^2 - 2\left(\left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n-1}{2}\right]\right)(3n-5),$$

ahol a szögletes zárójel a benne álló szám egész részét jelöli; ugyanis ezen egész részek különbsége páros n esetén 1, páratlan n esetén 0.

3. Az (1) képlet szerint a vizsgált Q, R, S, T hely környezetében áthaladó transzverzális-hármasokkal határolt háromszög területe az ABC háromszög területének rendre

$$1/94\,979, \quad 1/141\,486, \quad 1/190\,402, \qquad \text{ill.} \qquad 1/104\,208$$

része. Az ilyen „majdnem egy pontban metsződő" transzverzális-hármasok jellemzésére azonban célszerűbb lenne a háromszög legnagyobb oldalát megadni a területe helyett. Ezen az úton jutottunk megoldáshoz az 1437. feladat I. megoldásában.