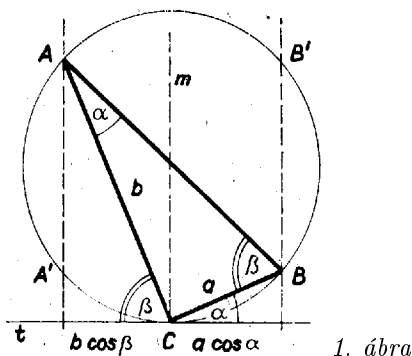


Rajzoljunk kört a háromszög köré és húzzuk meg C -ben a t érintőjét. Ez az a oldallal α szöget, a b oldallal β szöget zár be, így $a \cos \alpha$ és $b \cos \beta$ az a , ill. b vetülete t -n. (1) tehát azt jelenti, hogy C -től mindkét irányban alkalmas egyenlő távolságot mérve t -re, az ezekben t -re állított merőleges metszi ki A -t, ill. B -t a körből (1. ábra).



A két merőleges vagy érinti a kört, ekkor ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög, vagy egy-egy hűrt metsz ki, amelyek szimmetrikusak a C -ben t -re állított m merőlegesre. Így 4 pontot metszenek ki, amelyek egy téglalap csúcsai. A és B tehát vagy szimmetrikusak m -re, és ekkor $AC = CB$, a háromszög egyenlő szárú, vagy a téglalap átellenes csúcsai. Utóbbi esetben AB a kör egy átmérője (a téglalap másik két csúcsából derékszögben látszik), s így ABC háromszög C -nél derékszögű. (1) mindkét esetben valóban teljesül, utóbbiban azért, mert a C -ben t -re állított merőleges az érintési sugár, így felezi AB -t, AC és BC vetülete tehát AB egyik, ill. másik felének is vetülete.

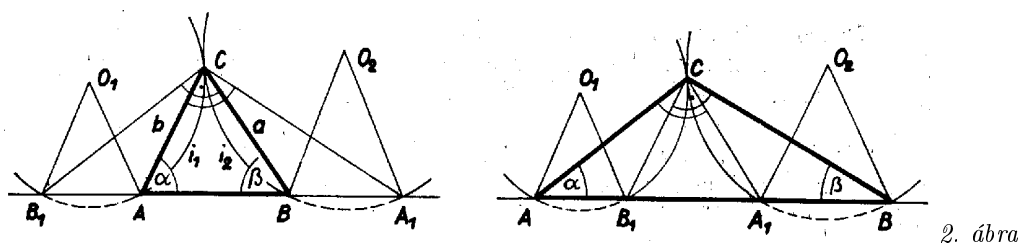
Megjegyzések. 1. A feladat kitűzésekor a versenyzők még csak hegyesszögek függvényeiről tanultak. Ha nem szorítkozunk erre az esetre, akkor is tudjuk, hogy α és β közül legalább az egyik hegyesszög, ekkor (1) megfelelő oldala pozitív, tehát a másik is, s így a másik szögnek hegyesszögnek kell lennie.

2. A beküldött megoldások általában felhasználták a háromszögek szinusz- vagy koszinusz-tételét – amit még szintén nem tanultak az iskolában –, azonban a közölt megoldás mutatja, hogy egyszerűen célhoz érünk a koszinusz-függvény értelmezésén kívül csak I. osztályos ismereteket felhasználva is.

3. Továbbra is hegyesszögekre szorítkozva (1)-nek átrendezett

$$(2) \quad \frac{\alpha}{\cos \beta} = \frac{b}{\cos \alpha}$$

alakja alapján is megadhatjuk a választ a kérdésre, kizárólag a koszinusz-függvény definíciója alapján.



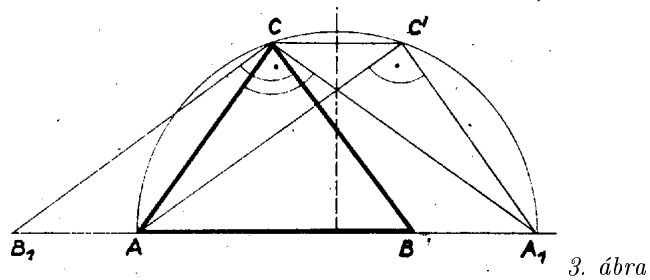
Messe a C -ben CB -re, CA -ra állított merőleges AB -t B_1 -ben, ill. A_1 -ben. Így (2) azt teszi fel, hogy a BB_1C és AA_1C derékszögű háromszögek átfogója egyenlő (2. ábra):

$$(3) \quad BB_1 = AA_1.$$

Ez nyilvánvalóan teljesül, ha A_1 azonos B -vel, vagyis ha C -nél derékszög van, hiszen ekkor B_1 is azonos A -val.

$\gamma < 90^\circ$ esetén A a BB_1 szakaszon, B az AA_1 szakaszon van, így (3)-ból AB -t levonva $B_1A = BA_1$, és ugyanez adódik $\gamma > 90^\circ$ esetén is, ha $AB = AB$ -ből (3)-at kivonjuk. A B_1A és BA_1 szakaszokat C -ből ugyanakkora szögben látjuk, ezért $|\gamma - 90^\circ|$ nyílású i_1, i_2 látóörívek sugarai is egyenlők. Azokat az íveket véve, melyek AB -nek azon az oldalán vannak, mint C , az ív O_1 , ill. O_2 középpontja a szakaszokkal egybevágó, egyenlő szárú háromszögeket alkot. A két ív egymás tükrös párja közös húregyenesükre, az ABC háromszög C -ből induló magasságvonalára nézve. Ugyanez áll tehát a CAB_1, CBA_1 háromszögpárra, vagyis az A, B pontpárra is, tehát ABC egyenlő szárú háromszög.

Ezek szerint a kérdéses háromszög vagy derékszögű, és benne a, b a befogók, vagy egyenlő szárú, és benne a, b a szárak.



4. A (3)-ra támaszkodva így is befejezhetjük a meg gondolást (3. ábra): AA_1C és BB_1C egybevágó derékszögű háromszögek. Toljuk el az utóbbit úgy, hogy B_1 az A -ba jusson, ekkor B az A_1 -be jut, ezért C -nek új, C' helyzete is rajta van az AA_1 szakasz fölötti Thalész-körön. CC' felező merőlegese AA_1 -re is merőleges, ezen tükrözve AA_1C' átme gy A_1AC -be, tehát $CA = C'A_1 = CB$.