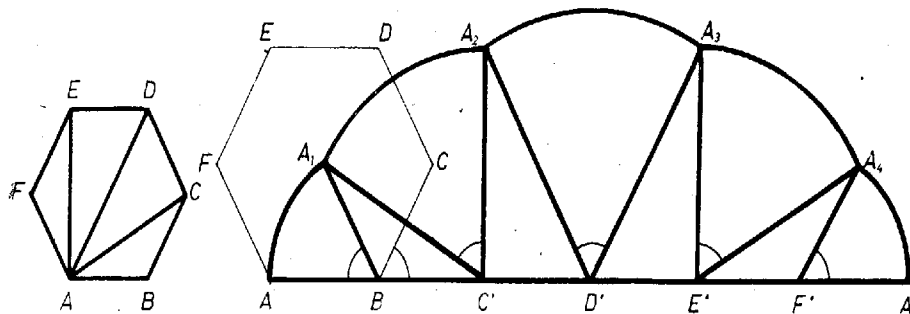


I. A hatszög rendre az AB egyenes B, C', D', E', F' pontjai körül fordul el $60-60^\circ$ -kal – H_6 külső szögével –, ahol $AB = BC' = C'D' = D'E' = E'F' = F'A'$. Eközben az A pont rendre az $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A'$ íveken mozdul el. Meghúzva az ívdarabok mindegyik csatlakozási pontjához a 2–2 megfelelő sugarat, ezek a kérdéses T idomot 5 körcikkre és köztük 4 háromszögre darabolják.



Az egymás utáni háromszögek rendre egybevágók azokkal a háromszögekkel, amelyek H_6 -ban keletkeznek, az AC, AD, AE átlókat megrajzolva, hiszen az előbbieket az utóbb említettekből keletkeznek kellő elfordítással, így területük összege egyenlő H_6 területével, t -vel.

Ezek szerint a körcikkek sugara rendre egyenlő H_6 -nak AB, AC, AD, AE, AF oldalával, ill. átlójával. Mindegyik körcikk területe $1/6$ része a vele egyenlő sugarú kör területének, ezért területük összege kellő csoportosítással és H_6 szabályos voltát felhasználva így írható:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6}((BA^2 + EA^2) + (CA^2 + FA^2) + DA^2) &= \frac{\pi}{6}(BE^2 + CF^2 + DA^2) = \frac{\pi}{6} \cdot 3DA^2 = \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot (2r)^2 = 2\pi r^2, \end{aligned}$$

ahol $DA/2 = r$ a H_6 köré írt k kör sugara; ugyanis $BE = CF = DA$, mint H_6 leghosszabb átlói, más szóval k átmérői.

Ezzel a T idom minden egyes darabját számba vettük, területeik összege valóban $t + 2\pi r^2$, amint a feladat állítja.

II. Gördítsünk most $2n$ -oldalú ($n > 3$, természetes szám) $G_0G_1G_2 \dots G_{2n-1} = H_{2n}$ szabályos sokszöget a $G_0G_1 = e$ egyenesen úgy, hogy az első elfordulás G_1 körül történjen, a továbbiak rendre $G_2, G_3, \dots, G_{2n-1}$ egymás után adódott helyzete körül. Legyen G_0 helyzete az egymás utáni elfordulások után $G_{01}, G_{02}, \dots, G_{0,2n-1}$. Az utolsó az e egyenesre esik. Az elfordulás középpontja rendre az egyenes $G_1, G'_2, G'_3, \dots, G'_{2n-1}$ pontja, ahol $G_0G_1 = G_1G'_2 = G'_2G'_3 = \dots = G'_{2n-1}G_{0,2n-1}$ a H_{2n} oldalhosszúsága, az elfordulás szöge pedig minden esetben H_{2n} külső szöge:

$$180^\circ - \frac{(2n-2) \cdot 180^\circ}{2n} = \frac{360^\circ}{2n},$$

a teljes szög $2n$ -ed része.

Összekötve G_0 minden közbülső helyzetét azzal a két ponttal, amely körüli elfordulással odaérkezett, ill. onnan továbbhaladt, a

$$G_{01}G_1, \quad G_{01}G'_2, \quad G_{02}G'_2, \quad G_{02}G'_3, \quad \dots, \quad G_{0,2n-2}G'_{2n-2}, \quad G_{0,2n-2}G'_{2n-1}$$

sugarak – szám szerint $2(2n-2)$ sugár – a vizsgálandó $G_0G_{01}, G_{01}G_{02}, \dots, G_{0,2n-2}G_{0,2n-1}$ egymáshoz csatlakozó ívek és a $G_0G_{0,2n-1}$ egyenesszakasz által határolt T idomot a számuknál 1-gyel több részre darabolják. A részek közül minden második rész körcikk, hiszen a berajzolt sugarak a másodiktól kezdve páronként egyenlők egymással és H_{2n} -nek $G_2G_0, G_3G_0, \dots, G_{n-1}G_0, G_nG_0, G_{n+1}G_0, \dots, G_{2n-2}G_0$ átlójával; az első és az utolsó elfordulási sugár pedig H_{2n} -nek G_0G_1 , ill. $G_{2n-1}G_0$ oldala. A körcikkek száma $(2n-2) + 1 = 2n-1$. Köztük a $G_{01}G_1G'_2, G_{02}G'_2G'_3, \dots, G_{0,2n-2}G'_{2n-2}G'_{2n-1}$ háromszögek keletkeztek, számuk $2n-2$, ezek rendre elfordított helyzetei annak a $2n-2$ háromszögnek, amelyek H_{2n} -ben keletkeznek a $G_0G_2, G_0G_3, \dots, G_0G_{2n-2}$ átló megrajzolása útján.

Eszerint a T idomban keletkezett háromszögek területének összege egyenlő H_{2n} területével, ezért a feladat állításához már csak azt kell belátnunk, hogy a körcikkek területének összege 2-szer akkora, mint a H_{2n} köré írt k kör területe. Legyen k sugara r . Minden egyes körcikk középponti szöge az egyszeri elfordulás $360^\circ/2n$ szöge, így területe egyenlő az elfordulási r_i sugárral írt kör területének $1/2n$ részével, $(\pi/2n) \cdot r_i^2$ -nel. Ezt kell tehát belátnunk:

$$\frac{\pi}{2n}(G_1G_0^2 + G_2G_0^2 + \dots + G_{2n-2}G_0^2 + G_{2n-1}G_0^2) = 2\pi r^2,$$

vagyis hogy a G_0 -ba befutó 2 oldal és $2n-3$ átló négyzetösszege $4n \cdot r^2 = n(2r)^2$.

A G_nG_0 átló k -nak átmérője, hossza $2r$. A további $2n-2$ átló négyzete alkalmas párokban ad $(2r)^2$ -et összegül, együtt tehát a hátra levő $(n-1) \cdot (2r)^2$ -et. Egy párba kapcsoljuk azt a két átlót, melyek kiindulópontja egymás

tükörképe H_{2n} -nek O középpontjára nézve, vagyis $G_i G_0$ -t és $G_{n+i} G_0$ -t, ahol $i = 1, 2, \dots, n-1$ (tehát $n+i = n+1, n+2, \dots, 2n-1$). Így valóban $G_i G_0^2 + G_{n+i} G_0^2 = G_i G_{n+i}^2 = (2r)^2$, hiszen i minden értékére $G_i G_{n+i} G_0$ a k -ba beírt derékszögű háromszög. – Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Göndöcs Ferenc (Kapuvár, II. sz. Ált. Isk. , 8. o. t.)

Pataki János (Budapest, Berzsenyi D. g. I. o. t.)

Megjegyzések. 1. H_{2n} esetére trigonometriai és goniometriai bizonyítás is adható, az $r_i = G_i G_0 = 2r \sin(i \cdot \pi)/2n$ és $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$ összefüggésekből kiindulva. A köríkek területének összege (itt $i = 1, 2, \dots, 2n-1$, de hozzá írhatjuk $i = 0$ -t is, mert így $r_i = 0$)

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2n} \cdot 2r^2 \left[(1 - \cos 0) + \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) + \left(1 - \cos \frac{2\pi}{n}\right) + \dots + \left(1 - \cos \frac{(2n-1)\pi}{n}\right) \right] = \\ = 2\pi r^2 - \frac{\pi r^2}{n} \left(\cos 0 + \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{2\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(2n-1)\pi}{n} \right). \end{aligned}$$

A zárójelbeli $2n$ tag összege 0, mert a tagok az $n+1$ -edikről kezdve rendre egyenlők az $1., 2., \dots, n$ sorszámú tag (-1) -szeresével, $j = 0, 1, \dots, n-1$ -re

$$\cos \frac{(n+j)\pi}{n} = \cos \left(\pi + \frac{j\pi}{n} \right) = -\cos \frac{j\pi}{n}.$$

Mészáros József (Makó, József A. g. , III. o. t.)

2. Azt is meg lehet mutatni, hogy az állítás páratlan oldalszámú szabályos sokszög gördítése esetén is érvényes.

3. Az r sugarú körbe írt szabályos sokszög oldalainak számát növelve területe nő és egyre jobban megközelíti k területét; így kézenfekvő az a sejtés, hogy a körnek egyenesen való gördítése esetén egy kerületi pont által leírt vonal – ún. közöséges ciklois – egy íve alatti terület egyenlő a gördített kör területének 3-szorosával.

Ésik Zoltán (Szeged, Ságvári E. gyak. g. II. o. t.)