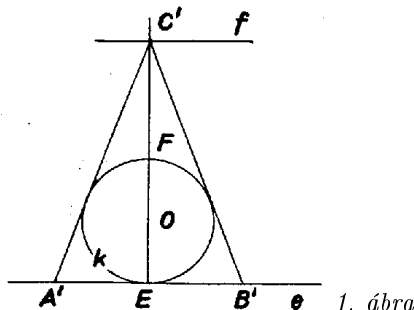


**I. megoldás.** Fordítsuk meg a feladatot, tekintsük adottnak a beírt  $k$  kört és ennek  $E$  pontjában az  $e$  érintőt, és kérdezzük, szerkeszthetők-e  $k$  köré olyan  $A'B'C'$  háromszögek, melyeknek  $A'$ ,  $B'$  csúcsa  $e$ -n van, bennük  $C'$ -nek  $e$ -től mért  $m_c$  távolsága egyenlő a  $\varrho$  sugár 4-szeresével, továbbá egymás után teljesülnek az I–III szögfeltételek. Ha ugyanis ez az  $A'B'C'$  háromszög megszerkeszthető, akkor az  $ABC$  háromszög is, mert hasonlók, tehát a keresett háromszögek egyszerű nagyítással vagy kicsinyítéssel (hasonlósági transzformációval) megkaphatók. Ha viszont az  $A'B'C'$  háromszög nem szerkeszthető, akkor az  $ABC$  háromszög sem.

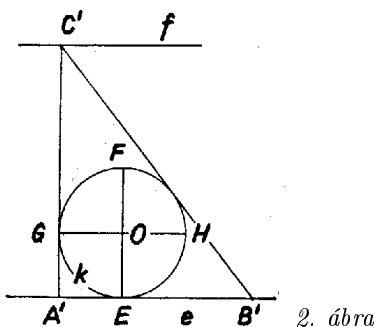
Legyen  $k$ -nak  $E$ -vel átellenes pontja  $F$  és  $e$  tükörképe  $F$ -re az  $f$  egyenes;  $C'$ -nek ezen kell rajta lennie.



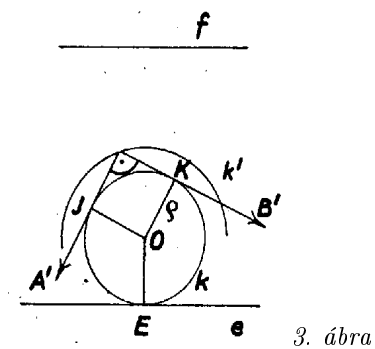
1. ábra

Az I. esetben a háromszög egyenlő szárú,  $B'C' = A'C'$ ,  $C'$ -t az  $EF$  egyenes metszi ki  $f$ -ből (1. ábra).  $C'$  a  $k$ -ra nézve külső pont, és távolabb van  $e$ -től, mint  $F$ , ezért a  $C'$ -ből  $k$ -hoz húzott érintők  $E$  két oldalán metszik  $e$ -t, az  $A'$ ,  $B'$  metszéspontokkal és  $C'$ -vel meghatározott háromszög a belsejében tartalmazza  $k$ -t, és nyilvánvalóan megfelel.

A II. esetben legyen  $k$ -nak  $e$ -vel párhuzamos átmérője  $GH$ , a  $G$ -beli érintőnek  $e$ -vel és  $f$ -vel való metszéspontja  $A'$ , ill.  $C'$ , és a  $C'$ -ből húzott második érintőnek  $e$ -vel való metszéspontja  $B'$ , így az  $A'B'C'$  háromszög nyilvánvalóan megfelelő (2. ábra).



2. ábra



3. ábra

A III. esetben  $C'$ , a kör  $O$  középpontja és a  $C'A$ ,  $C'B$  befogón levő  $J$ , ill.  $K$  érintési pontja egy négyzet 4 csúcsát adja (3. ábra), így  $C'$ -nek az  $O$  körüli  $\sqrt{2}\varrho$  sugarú  $k'$  körön kellene lennie (ennek sugara egyenlő a 2. ábra  $OA'$  szakaszával). Ennek azonban nincs közös pontja  $f$ -vel,  $\sqrt{2}\varrho < 3\varrho$ , tehát ilyen háromszög nem szerkeszthető.

Ezzel a feladatot megoldottuk, az I–II. esetekben válaszunk igenlő, a III. esetben tagadó.

Kőnig Imre (Budapest, Kölcsey F. g. II. o. t.)

**II. megoldás.** Legyen a keresett háromszögbe írható kör sugara  $\varrho$ , akkor a feladat szerint a  $C$  csúcshoz tartozó magasság  $m_c = 4\varrho$ . Ismeretes, hogy  $\varrho = \frac{2t}{a+b+c}$ , ahol a háromszög  $2t$  kétszeres területe esetünkben  $2t = c \cdot m_c = 4\varrho c$ , tehát

$$\varrho(a+b+c) = 4\varrho c,$$

amit  $\rho(> 0)$ -val osztva és rendezve kapjuk, hogy

$$(1) \quad a + b = 3c.$$

Mármost az I. esetben  $a = b = 3c/2$ .

A II. esetben Pitagorasz tétele szerint

$$c^2 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$$

így (1) alapján

$$a - b = \frac{c^2}{a + b} = \frac{c^2}{3c} = \frac{c}{3},$$

majd ismét (1) alapján  $a = 5c/3$ ,  $b = 4c/3$ .

A III. esetben Pitagorasz tétele szerint  $c^2 = a^2 + b^2$ , másrészt átalakítással, majd (1)-et felhasználva

$$a^2 + b^2 = \frac{2a^2 + 2b^2}{2} = \frac{(a + b)^2 + (a - b)^2}{2} \geq \frac{(a + b)^2}{2} = \frac{9}{2}c^2,$$

tehát nincs a feladatnak eleget tevő háromszög.

Az I-II. esetben tehát a keresett háromszög megszerkeszthető a további két oldala alapján, a III. esetben viszont nincs megoldása a feladatnak.

*Hadik Róbert* (Makó, József A. g. I. o. t.)  
*Kálmán Miklós* (Budapest, Fazekas M. gyak. g. I. o. t.)