

I. A gyökjel előtti pozitív szorzókat a gyökjel alá vite és elvégezve a műveleteket, és a kínálkozó egyszerűsítéseket, minden esetben az első gyökmennyiséget kapjuk. Figyeljük meg, hogy a gyökjel alatti nevező minden esetben osztója a gyökjel előtt álló tört számlálójának négyzetének. Jelöljük a -val azt a számot, aminek a négyzetgyökét akarjuk kifejezni, x/y -nal a gyökjel előtti törtet, ekkor x -et a gyökjel alá vite az elmondottak szerint ilyen alakú összefüggéseket kapunk:

$$\sqrt{a} = \frac{1}{y} \sqrt{x^2 + z},$$

ahol x, y pozitív egész és z olyan egész, amelyre $|z| < x^2$. Átszorozva y -nal és négyzetre emelve

$$(2) \quad ay^2 = x^2 + z.$$

Ha találunk ennek eleget tevő x, y, z -t, akkor ezekkel fennáll a következő összefüggés is:

$$(3) \quad \sqrt{a} = \frac{x}{y} \sqrt{1 + \frac{z}{x^2}}.$$

Ez annál érdekesebb, minél kisebb $|z|$. A fenti példákban az $(x|y|z)$ hármaskok $a = 2$ esetén $((3|2|-1), (4|3|2), (7|5|1), (10|7|-2); a = 3$ -hoz $(7|4|-1), (12|7|3); a = 5$ -höz $(20|9|5)$ és $a = 10$ -hez $(10|3|-10)$. Ezekben a példákban z osztója x^2 -nek, ehhez azonban nem kell ragaszkodnunk.

Megfigyelhetjük viszont azt is, hogy amelyik példákban a gyökjel alatti nevező nem négyzetszám, ott a külső tört számlálóját ay' alakú, a belső nevező pedig ay'^2 , amit beírva a

$$(4) \quad \sqrt{a} = \frac{ay'}{x'} \sqrt{1 + \frac{z'}{ay'^2}}$$

alakra jutunk (példáinkban z' mindig 1 vagy -1). Innen átrendezéssel az

$$ay'^2 = x'^2 + z'$$

összefüggést kapjuk, ami csak a betűk mellé tett vesszőkben tér el (2)-től. Így (2) minden megoldásából (3), ill. (4) alapján $\sqrt{a}$ -t előállíthatjuk a gyökjel alatt összeggel is, különbséggel is.

II. Az 5-höz és 10-hez fent megadott előállításokból leolvasható a

$$\begin{aligned} \sqrt{5} &= \frac{45}{20} \sqrt{1 - \frac{5}{405}} = \frac{9}{4} \sqrt{1 - \frac{1}{81}} \\ \sqrt{10} &= \frac{30}{10} \sqrt{1 + \frac{10}{90}} = 3 \sqrt{1 + \frac{1}{9}} \end{aligned}$$

előállítás, vagy az

$$5 \cdot 3^2 = 7^2 - 4, \quad 5 \cdot 17^2 = 38^2 + 1, \quad 10 \cdot 7^2 = 22^2 + 6, \quad 10 \cdot 6^2 = 19^2 - 1$$

egyenlőségekből

$$\begin{aligned} \sqrt{5} &= \frac{7}{3} \sqrt{1 - \frac{4}{49}} = \frac{15}{7} \sqrt{1 + \frac{4}{45}} = \frac{38}{17} \sqrt{1 + \frac{1}{1444}} = \frac{85}{38} \sqrt{1 - \frac{1}{1445}}; \\ \sqrt{10} &= \frac{22}{7} \sqrt{1 + \frac{3}{242}} = \frac{35}{11} \sqrt{1 - \frac{3}{245}} = \frac{19}{6} \sqrt{1 - \frac{1}{361}} = \frac{60}{19} \sqrt{1 + \frac{1}{360}}. \end{aligned}$$

Hasonlóan a további gyökalapokhoz egy-egy $(x|y|z)$ számhármast választva:

$$\begin{aligned} 6 \cdot 2^2 &= 5^2 - 1, & 7 \cdot 3^2 &= 8^2 - 1, & 11 \cdot 3^2 &= 10^2 - 1, & 13 \cdot 5^2 &= 18^2 + 1, \\ 14 \cdot 4^2 &= 15^2 - 1, & 15 \cdot 8^2 &= 31^2 - 1, & 16 \cdot 3^2 &= 13^2 - 25, & 26 \cdot 1^2 &= 5^2 + 1. \end{aligned}$$

Ezekből

$$\begin{aligned} \sqrt{6} &= \frac{5}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \frac{12}{5} \sqrt{1 + \frac{1}{24}}; & \sqrt{7} &= \frac{8}{3} \sqrt{1 - \frac{1}{64}} = \frac{21}{8} \sqrt{1 + \frac{1}{63}}; \\ \sqrt{11} &= \frac{10}{3} \sqrt{1 - \frac{1}{100}} = \frac{33}{10} \sqrt{1 + \frac{1}{99}}; & \sqrt{13} &= \frac{18}{5} \sqrt{1 + \frac{1}{324}} = \frac{65}{18} \sqrt{1 - \frac{1}{325}}; \\ \sqrt{14} &= \frac{15}{4} \sqrt{1 - \frac{1}{225}} = \frac{56}{15} \sqrt{1 + \frac{1}{224}}; & \sqrt{15} &= \frac{31}{8} \sqrt{1 - \frac{1}{961}} = \frac{120}{31} \sqrt{1 + \frac{1}{960}}; \\ \sqrt{16} &= \frac{13}{3} \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{48}{13} \sqrt{1 + \frac{25}{144}}; & \sqrt{26} &= 5 \sqrt{1 + \frac{1}{25}} = \frac{26}{5} \sqrt{1 - \frac{1}{26}}. \end{aligned}$$

Megjegyzések. 1. Ha $a = 16$, akkor ay^2 is teljes négyzet s így z abszolút értéke mint két négyzetszám különbségéé, mindig 1-nél nagyobb, de erre már a korábbiakban is láttunk példát.

2. Az átalakítások felhasználhatók a gyököknek az 1109. gyakorlat ¹ alapján való gyorsabb kiszámításában.

¹Lásd ezen számban 151. old.