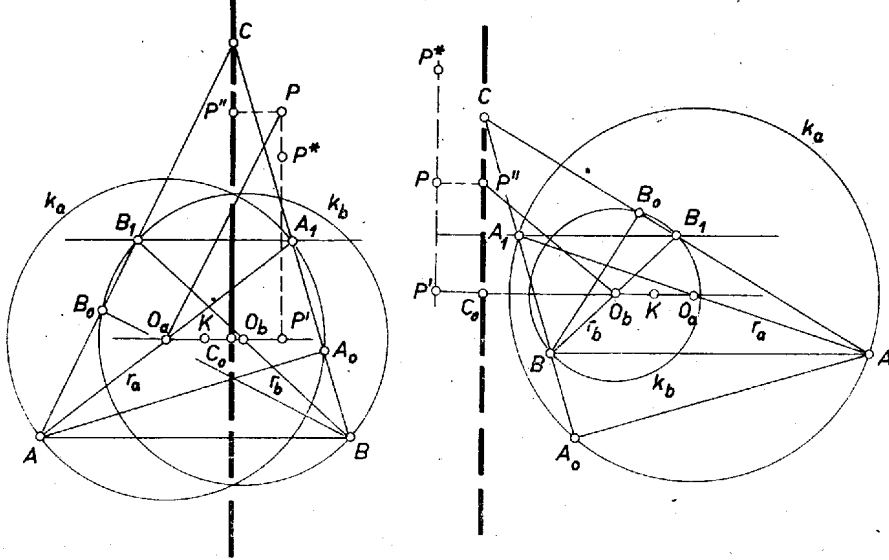


I. Legyen az ABC háromszög AA_1 , BB_1 súlyvonala mint átmérő fölé írt kör k_a , ill. k_b , középpontjuk O_a , ill. O_b (különbözők, hiszen felezik a súlyvonalat, azok közös pontja viszont harmadolja őket). A C csúsból akkor húzható a körkhöz érintő, ha C -ben hegyesszög van. Ha ugyanis $\angle ACB = 90^\circ$, akkor C mindkét körön rajta van, és ha $\angle ACB < 90^\circ$, akkor C -t mindkét kör a belsejében tartalmazza.

Ismeretes, hogy egy körhöz valamely külső pontból húzott érintőszakasz négyzete egyenlő a pontból induló bármely szelő két szelvényének a szorzatával, így állításunkat megfelelő szelők felhasználásával bizonyítjuk be.



Legyen az $\angle ACB$ hegyesszög és legyen A , ill. B vetülete a CB , ill. CA egyenesen A_0 , ill. B_0 . Ha A_0 és A_1 nem azonos, akkor A_0 -ból az AA_1 szakasz derékszög alatt látszik, tehát A_0 rajta van k_a -n, így a BC egyenes k_a -t az A_0 , A_1 pontokban metszi. Ha pedig A_0 és A_1 azonos, akkor $AA_1 \perp BC$, és BC érinti k_a -t. Mindkét esetben igaz tehát, hogy a C -ből k_a -hoz húzott érintőszakasz négyzete egyenlő a $CA_1 \cdot CA_0$ szorzattal. – Hasonlóan kapjuk, hogy a C -ből k_b -hez húzott érintőszakasz négyzete egyenlő a $CB_1 \cdot CB_0$ szorzattal.

Az AA_0C , BB_0C háromszögek derékszögűek és hasonlóak, hiszen C -beli szögük közös. Emiatt

$$CA : CA_0 = CB : CB_0,$$

tehát $CA_0 \cdot CB = CA \cdot CB_0$, amiből 2-vel való osztással kapjuk a bizonyítandó $CA_0 \cdot CA_1 = CB_1 \cdot CB_0$ egyenlőséget.

II. Mivel egy körhöz valamely külső pontból húzott e érintőszakasz merőleges az érintési ponthoz tartozó sugárra, az általuk meghatározott derékszögű háromszög alapján az érintőszakasz négyzete $d^2 - r^2$ -tel egyenlő – ahol r a kör sugara, és d a külső pontnak a kör középpontjától mért távolsága.

Legyen a k_a , k_b körök sugara r_a , r_b , és egy tetszés szerinti – mindkét körre nézve külső – P pontnak az O_aO_b egyenesen levő vetülete P' . Akkor a P -ből húzott érintőszakaszok négyzete

$$e_a^2 = PP'^2 + P'O_a^2 - r_a^2, \quad \text{ill.} \quad e_b^2 = PP'^2 + P'O_b^2 - r_b^2.$$

Ha P -t a PP' egyenesen elmozdítjuk P^* -ba, akkor a fenti kifejezésekben csak a bennük közösen fellépő PP' szakasz hossza változik meg: P^*P' -re, így ha fennállt $e_a = e_b$, akkor $e_a^* = e_b^*$ is teljesül, ahol e_a^* , e_b^* a P^* -ból húzott érintők hossza. Esetünkben tehát a C -n átmenő O_aO_b -re merőleges egyenesnek minden – a körökre nézve külső – pontjából a két körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők.

Mivel pedig O_a is, O_b is egyenlő távol van az egymással párhuzamos AB , A_1B_1 egyenesektől, s így $O_aO_b \parallel AB$, azért a C -ből O_aO_b -re bocsátott merőleges azonos az ABC háromszögnek C -ből húzott magasságegyenesével.

Megmutatjuk, hogy – megfordítva – ha a tetszés szerinti P pontból a k_a , k_b körkhöz húzott érintőszakaszok egyenlők, akkor P rajta van a C -hez tartozó magasságegyenesen. Legyen C vetülete az O_aO_b egyenesen C_0 , P vetülete az O_aO_b és CC_0 egyenesen P' , ill. P'' , így azt kell belátnunk, hogy P' azonos C_0 lal. A föltevés alapján, a fentiek felhasználásával

$$PP'^2 + P'O_a^2 - r_a^2 = PP'^2 + P'O_b^2 - r_b^2,$$

másrészt P'' -re a fentiek szerint

$$P''C_0^2 + C_0O_a^2 - r_a^2 = P''C_0^2 + C_0O_b^2 - r_b^2.$$

Ezekből kivonással, átrendezéssel és a $PP' = P''C_0$ egyenlőségre tekintettel

$$(1) \quad P'O_a^2 - P'O_b^2 = C_0O_a^2 - C_0O_b^2.$$

Tegyük föl, hogy $BAC \angle \leq ABC \angle \leq 90^\circ$, amit – ha kell – az A, B betűk kezdeti fölcserélésével elérhetünk. Ekkor – mint könnyen belátható – C_0 az $O_a O_b$ szakasz K felezőpontjának azon az oldalán van, mint O_b , vagy éppen K -ban, $C_0 O_a \geq C_0 O_b$, (1) jobb oldala nem negatív, így bal oldala sem, s emiatt $P' O_a \geq P' O_b$, P' ugyancsak a $K O_b$ félegyenesen, vagy éppen K -ban van. Így

$$\begin{aligned} P' O_a &= K O_a + P' K, & P' O_b &= |K O_b - P' K| = |K O_a - P' K|, \\ C_0 O_a &= K O_a + C_0 K, & C_0 O_b &= |K O_a - C_0 K|, \end{aligned}$$

ezeket (1)-be helyettesítve $P' K = C_0 K$, ami állításunkat igazolja.

Összefoglalva a fentieket, kimondhatjuk, hogy egy külső P pontból a k_a, k_b körökhöz húzott érintőszakaszok akkor és csak akkor egyenlők, ha P az ABC háromszög C csúcsához tartozó magasságvonalán van.

Több dolgozatból, kiegészítésekkel

Megjegyzés. Egy adott körhöz és egy tetszőleges ponthoz tartozó $d^2 - r^2$ kifejezés értékét az illető pontnak az adott körre vonatkozó *hatványának* nevezzük. A megoldás második felében végzett megfontolások akkor is érvényesek, ha a $d^2 - r^2$ kifejezés értéke 0 vagy negatív. Természetesen ebben az esetben a pont nem külső pontja a körnek, így nem beszélhetünk érintőről; az viszont, hogy a $d^2 - r^2$ kifejezés értéke egyenlő a ponton átmenő szelő szeleteinek a szorzatával, ebben az esetben is igaz, ha a belső ponton átmenő szelő szeleteit ellentétes előjelűnek tekintjük. Megállapításunkat tehát így is kimondhatjuk: azoknak a pontoknak a mértani helye, melyeknek két adott körre vonatkozó hatványa egyenlő, egy a körök centrálisára merőleges egyenes, szokásos nevén a két kör *hatványvonala*. Ez az egyenes nyilván átmegy a körök közös pontján – ha van közös pontjuk –, mert a közös pont hatványa mindkét körre nézve 0, vagyis azonos a körök közös húregyenesével, érintkezés esetén közös érintőjükkal. Ha nincs közös pont, akkor a hatványvonal egyik kört sem metszi.