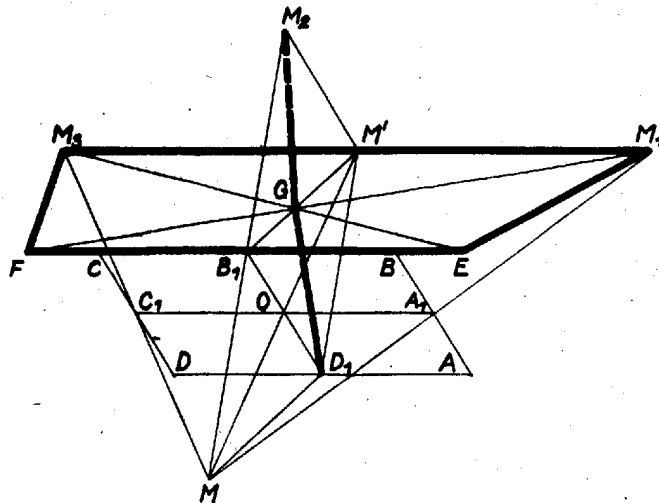


a) A tükrözés folytán $A_1M_1 = MA_1$, $MM_1 = 2 \cdot MA_1$, ugyanígy $MM_3 = 2 \cdot MC_1$, ezért A_1C_1 az MM_1M_3 háromszögnek középvonala. A_1C_1 másrészt az $ABCD = P$ paralelogrammának is középvonala, így $EF \parallel A_1C_1 \parallel M_1M_3$, tehát $EFM_3M_1 = T$ valóban trapéz. (T a mondott körüljárás szerint konvex, ha E -t a B_1B félegyenesen választottuk; ezt – ha kell – az E, F jelek fölcserélésével elérhetjük.) – Amennyiben M -et az AD egyenesen választjuk, T elfajul egyenesszakasszá, mert M_1, M_3 a BC egyenesen adódik, ezt az esetet tovább figyelmen kívül hagyjuk. Bizonyításunk akkor is helyes, ha M -et az A_1C_1 egyenesen választjuk, mert – bár ekkor az MM_1M_3 háromszög elfajul szakasszá –, M_1M_3 egyenes azonos A_1C_1 -gyel.



b) Mivel még minden esetben $M_1M_3 = 2 \cdot A_1C_1 = 2 \cdot BC$, T akkor és csak akkor adódik paralelogrammának, ha $EF = 2 \cdot BC$, más szóval, ha E, F a B_1 -nek tükröképe B -re, ill. C -re nézve. Ez a keresett első feltétel.

c) A második kérdéshez felhasználjuk, hogy G rajta van T -nek B_1 -ből kiinduló középvonalán. Legyen M tükröképe A_1C_1 -nek O felezőpontjára nézve M' , ez a tükrözések miatt felezi M_1M_3 -at, így a mondott középvonal B_1M' . Állításunk abból adódik, hogy $EFG = H_1$ és $M_3M_1G = H_2$ a G középpontra nézve hasonló helyzetű háromszögek, és B_1, M' ezekben egymásnak megfelelő pontok.

B_1 és D_1 ugyancsak egymás tükröképei O -ra nézve, hiszen O a P -nek a középpontja, így $MB_1M'D_1$ paralelogramma. Ezért $B_1M_2M'D_1 = P'$ is paralelogramma, hiszen $B_1M_2 \parallel MB_1 \parallel D_1M'$, és G rajta van ennek B_1M' átlóján, másik átlója pedig a kérdéses ponthármas első két pontját összekötő egyenes. Ezek szerint két módon teljesülhet, hogy a D_1M_2 egyenes átmegy G -n:

I. Ha P' egyenesszakasszá elfajult paralelogramma, vagyis a D_1M_2 és a B_1M' egyenesek egybeesnek, M_2 a B_1D_1 egyenesen adódott. Ez akkor és csak akkor következik be, ha M -et a B_1D_1 egyenesen választottuk.

II. Ha G a P' átlóinak metszéspontja, vagyis ha felezi a B_1M' átlót. Ehhez szükséges és elegendő, hogy H_1 és H_2 egybevágók legyenek, $EF = M_1M_3 = 2 \cdot BC$ legyen, vagyis amikor T paralelogrammának adódik.

Gönczi István (Miskolc, Földes F. Gimn., I. o. t.)