

α) A behelyettesítés meglepő eredményre vezet, az I-III. számhármaskok esetében mindig -286 -ot kapunk, IV. és V. esetében pedig egyformán 884 -et.

β) Vegyük észre, hogy K második szorzatának első tényezője azonos az első szorzat harmadik tényezőjével, a 3. szorzat 1. tényezője a 2. szorzat 3. tényezőjével, 3. tényezője pedig az 1. szorzat 1. tényezőjével, – továbbá, hogy mindegyik szorzatban a 3. tényező egyenlő az előtte álló két tényező összegével. Ezeket felhasználjuk a kívánt szorzattá alakításban. Jelöljük egy-egy betűvel az 1. szorzat 1., 2., valamint a 2. szorzat 2. tényezőjét:

$$x + 2y + 3z = A, \quad 2x - y - z = B, \quad 2y - z - x = C,$$

ekkor K így írható, majd alakítható:

$$\begin{aligned} K &= AB(A + B) + (A + B) \cdot C \cdot (A + B + C) + (A + B + C) \cdot [A - (A + C)] \cdot A = \\ &= AB(A + B) + (A + B + C)(BC - AB) = B[(A^2 + AB) + (C^2 - A^2) + (BC - \\ &- AB)] = BC(B + C) = (-B) \cdot (-C) \cdot (B + C). \end{aligned}$$

Itt a három tényező rendre K első, második, harmadik szorzata 2. tényezőjének (-1) -szerese, ennél fogva

$$(1) \quad K = (y + z - 2x) \cdot (z + x - 2y) \cdot (x + y - 2z).$$

γ) Itt a 2. tényező úgy képezhető az 1.-ből, a 3. tényező is a 2.-ből (végül még az 1. is a 3.-ból), hogy az x, y, z betű helyére rendre y, z, x betűt írunk, a szokásos kifejezéssel: x -et, y -t és z -t ciklikusan fölcseréljük. Ugyanígy áll elő a III. számhármask az I-ből, ez a magyarázata annak, hogy III. és I. esetében ugyanazt az értéket kaptuk K -ra, hiszen K -nak (1) alakjában így csak a tényezők sorrendje változik meg.

Azt is látjuk, hogy x, y, z helyére rendre az $x + u, y + u, z + u$ számot írva, ahol u tetszőeszerinti szám, (1) tényezői változatlanok maradnak, mert pl. az elsőben $2x$ ugyanannyival változik, mint az $y + z$. Ez magyarázza meg a II. és az I. számhármaskok esetében adódott egyenlőséget, $u = 10$.

A IV. és V. eredmények megegyezésének magyarázatában (1) mindkét észrevett tulajdonságát fölhasználjuk: Legyen $u = -3$, ekkor a második tulajdonsága szerint a IV. számhármassal megegyező értéket ad az $x = 1 - 3 = -2$, $y = 8 - 3 = 5$, $z = 11 - 3 = 8$ számhármask, ebből viszont ciklikus cserével adódik az V. számhármask.

Megjegyzés. K egyszerűbb alakra hozása számos más módon is lehetséges. Pl. a szorzatok 1. tényezője helyére egy-egy új betűt bevezetve:

$$x + 2y + 3z = D, \quad y + 2z + 3x = E, \quad z + 2x + 3y = F,$$

összefüggéseinket egyenletrendszernek tekinthetjük, x -et, y -t és z -t ismeretleneknek, D -t, E -t, F -et paramétereknek tekintve. Innen

$$x = \frac{1}{18}(-5D + 7E + F), \quad y = \frac{1}{18}(D - 5E + 7F), \quad z = \frac{1}{18}(7D + E - 5F),$$

ezekkel az 1. szorzat 2. tényezője

$$2x - y - z = \frac{1}{18}(-18D + 18E) = E - D,$$

amit fönt is észrevettünk. Hasonlóan a 2. és a 3. szorzat 2. tényezője $F - E$, $D - F$. K -nak így adódó

$$S = D \cdot (E - D) \cdot E + E \cdot (F - E) \cdot F + F \cdot (D - F) \cdot D$$

alakját sem nehéz $(E - D)(F - E)(D - F)$ alakra hozni.

Nem lehetne viszont hasonló alakítást végezni pl. az 1. szorzat tényezőit véve paramétereknek, mert – mint láttuk – ezek nem függetlenek egymástól.

Csirmaz László (Budapest, I. István g. II. o. t.)