

Csak azok a sorrendek jönnek szóba, amelyek 1-re vagy 3-ra végződnek, különben a szám osztható 2-vel, nem törzsszám. Mindkétféle végződés előtt $3 \cdot 2 = 6$ féle sorrend lehetséges, a maradó három jegyből az első helyet 3-féleképpen tölthetjük be, minden ilyen kezdés után a másik 2 jegyet még kétféle sorrendben írhatjuk le. A vizsgálandó 12 szám:

I. 2341, II. 2431, III. 3241, IV. 3421, V. 4231, VI. 4321;
VII. 1243, VIII. 1423, IX. 2143, X. 2413, XI. 4123, XII. 4213.

A számokat sorra osztjuk az egymás utáni prímszámokkal. Amelyik szám valamelyik osztásban 0 maradékot ad (és persze a hányados nagyobb 1-nél), azt töröljük, mert nem prímszám.

A II., IV., VII. és XII. szám osztható 11-gyel, mert pl. az elsőben $(1 + 4) - (3 + 2) = 0$, ami osztható 11-gyel.¹ A próba szerint a III. és a XI. szám osztható 7-tel, a X. szám 19-cel, és a VI. szám 29-cel. 2341-et az egymás utáni

3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

páratlan prímszámokkal osztva minden esetben maradék lép föl, tehát 2341 prímszám. Nagyobb prímszámmal ugyanis már fölösleges próbálkozni, mert ha pl. 53 osztója volna 2341-nek, akkor a $2341 : 53 = q$ hányados egész szám volna, és pedig 53-nál kisebb, hiszen $53q = 2341 < 2809 = 53^2$, amit 53-mal osztva $q < 53$. Így pedig q nem lehetne prímszám a végzett osztási próbák miatt, de összetett szám sem, mert akkor lenne prímszám-osztója a fenti felsorolásban. Hasonlóan nem osztható 2341 a nála kisebb és 47-nél nagyobb prímszámok egyikével sem. A 47-tel való próba viszont még szükséges volt, mert $47^2 = 2209 < 2341$.

Általában, egy szám prímfelbontását keresve elég azokkal a prímekekkel próbálkozni, amelyeknek a négyzete nem nagyobb a számnál. Valóban, ha $n = a \cdot b$, és itt $1 < ab \leq b$, akkor $n = ab \geq a^2$, $a \leq \sqrt{n}$, így vagy a , vagy a -nak prímosztója n -nek is prímosztója.

Ennek alapján a 4231 számnak a 61-ig, 1423-nak a 37-ig és 2143-nak a 43-ig terjedő prímekekkel való és minden esetben maradékkal végződő osztási próbája után kimondható, hogy az illető szám prímszám.

Mindezek szerint a kérdéses számok között 4 prímszám van.

Fodor Zsuzsa (Pápa, Türr I. g. I. o. t.)

¹Egy természetes szám akkor és csak akkor osztható 11-gyel, ha a (jobbról számítva) páratlan sorsszámú helyeken álló számjegyeinek összegéből kivonva a páros sorsszámú helyeken álló számjegyeinek összegét, 11-gyel osztható számot kapunk.