[1]

I. megoldás. I. A 9–13 számok összes előállítása az 1–10 egész számokból választott két különböző szám összegeként:

$$\begin{aligned}9&=1+\ 8=2+7=3+6=4+5,\\10&=1+\ 9=2+8=3+7=4+6,\\11&=1+10=2+9=3+8=4+7=5+6,\\12&=2+10=3+9=4+8=5+7,\\13&=3+10=4+9=5+8=6+7.\end{aligned}$$

9-et $1+8$ alakban előállítva 10-et a fel nem használt számokból $3+7$ és $4+6$ alakban kaphatjuk. Az első esetben 12-t és 13-at már csak a $2+10$, ill. $4+9$ adhatja ki, és a hátra levő $5+6$ előállítja a 11-et, hiszen az 1–10 számok összege egyenlő a 9–13 számok összegével, ezért az első négy előállításban föl nem használt két szám összege mindig a még hátra levő összeget adja. A második esetben pedig csak a $11=2+9$ és $13=3+10$ előállításoknak szabad mindkét tagja.

9-et $2+7$ alakban véve 10-re ismét két lehetőség marad: $1+9$ és $4+6$. Az első esetben 12 már csak $4+8$ alakban állítható elő, és ezért 13 csak a $3+10$ alakban, a másodikban pedig egyértelműen $12=3+9$, és ezért $13=5+8$.

9-et $3+6$ alakban képezve vagy $10=1+9$, vagy $10=2+8$. Az első esetben csak $11=4+7$ és $13=5+8$ marad lehetséges, a másodikban csak $12=5+7$ és $13=4+9$. Utoljára a $9=4+5$ előállításból kiindulva 10-re három előállítás marad fenn, viszont a 12-re csak kettő, célszerű ezzel folytatni a párokba rendezést. Véve a $12=2+10$-et, már csak $11=3+8$ és $13=6+7$ marad; ha pedig $12=3+9$, akkor $13=6+7$, $11=1+10$.

Ezzel a 9-es szám minden előállítását minden lehető módon teljes párokba rendezéssé fejlesztettük, minden kívánt csoportosítást előállítottunk és a következő 8 csoportosítást kaptuk:

	9	10	11	12	13
I.	$1+8$	$3+7$	$5+6$	$2+10$	$4+9$
II.	$1+8$	$4+6$	$2+9$	$5+7$	$3+10$
III.	$2+7$	$1+9$	$5+6$	$4+8$	$3+10$
IV.	$2+7$	$4+6$	$1+10$	$3+9$	$5+8$
V.	$3+6$	$1+9$	$4+7$	$2+10$	$5+8$
VI.	$3+6$	$2+8$	$1+10$	$5+7$	$4+9$
VII.	$4+5$	$1+9$	$3+8$	$2+10$	$6+7$
VIII.	$4+5$	$2+8$	$1+10$	$3+9$	$6+7$

Eszerint a számpárok összegei nem mindig határozzák meg egyértelműen a számok párokba rendezését.

II. Az 1-es szám párját 9–féleképpen választhatjuk meg a többi számok közül. Mindegyik párbaállítást 7–féleképpen folytathatjuk úgy, hogy a második pár első tagjának a még rendelkezésre álló számok legkisebbikét választjuk, mert így e pár második száma mindig 7–féleképpen választható a további 7 szám közül, tehát az ilyen továbbfejlesztések száma $9\cdot 7$. Hasonlóan a harmadik, majd a negyedik pár első tagjának a még pár nélkül állók legkisebbikét véve, ennek párját a 3. párban 5–féleképpen, a 4. párban 3–féleképpen választ hatjuk, tehát a továbbfejlesztések száma előbb $9\cdot 7\cdot 5$-re, majd $9\cdot 7\cdot 5\cdot 3=945$-re emelkedik. Ennyi az 5 párba rendezés lehetőségeinek száma, mert mindig figyelembe vettük a továbbfejlesztés minden lehetőségét, ezek mind különböznek egymástól legalább egy párban, végül mert a kialakított 4 pár minden esetben meghatározza az ötödik párt is. – Eszerint az illető helyesen számolt.

Pál László (Pécs, Zipernovszky K. gépip. t. I. o. t.)
Csur Endre (Budapest, Könyves Kálmán g. II. o. t.)

II. megoldás *a feladat II. kérdésére.* n különböző elemből kettőt $n(n-1)/2$-féleképpen lehet kiválasztani, mert a pár első tagjának n-féle kiválasztása után a 2. tagot csak $n-1$-féleképpen választhatjuk, az így adódó $n(n-1)$ párba állítási lehetőség azonban minden párt 2-szer ad meg, pl. a, b és b, a alakban. Eszerint ha a cédulákra felírt 10 számunk párokba rendezését úgy hajtjuk végre, hogy egy zacskóból egymás után négyszer 2–2 cédulát húzunk ki 1–1 pár tagjaiként, és a bennmaradt 2 számot is egy párnak tekintjük, ezt

$$\frac{10\cdot 9}{2}\cdot\frac{8\cdot 7}{2}\cdot\frac{6\cdot 5}{2}\cdot\frac{4\cdot 3}{2}$$

féleképpen végezhetjük el.

Így azonban minden egyes 5 párba rendezést többször is megkapunk, mégpedig annyiszor, ahányféleképpen 5 különböző tárgyat – itt a párokat –sorba lehet állítani. Erre $2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$ lehetőség van, mert letéve egy tárgyat, a másodikat ehhez képest 2-féleképpen helyezhetjük el: eléje és mögéje, a harmadikat 3-féleképpen: az első elé, a második elé és a második mögé s í. t.

[1] Ez a feladat az Élet és Tudomány 1966. évi 49. számának rejtvénye volt.

Most már a 10 szám 5 párba állítási lehetőségeinek számát – ha a párok sorrendjét nem tekintjük – úgy kapjuk, hogy a fentebbi számot osztjuk az utóbbival:

$$\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{2^4\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=5\cdot 9\cdot 7\cdot 3=945.$$

Bárd Péter András (Budapest, Fazekas M. gyak. g. I. o. t.)