

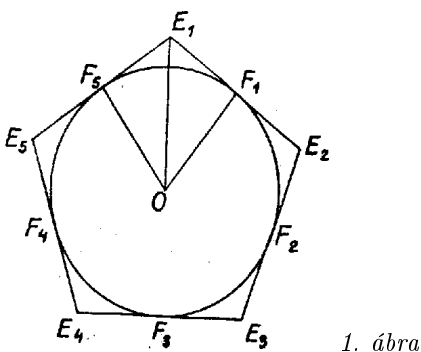
Az I. állítás igaz. Ugyanis a kör középpontját a sokszög csúsaival összekötve egybevágó egyenlő szárú háromszögeket kapunk, és a sokszög mindegyik szöge 2-szer akkora, mint e háromszögekben az alapon fekvő szög. (Az $n = 3$ esetben az állítás helyes volta egyszerűbben adódik a kör felhasználása nélkül, hiszen minden háromszög körbeírt.)

A II. állítás hamis. $n = 4$ esetén a rombusz megfelel a feltételeknek – beírt körének középpontja az átlók metszéspontja –, de szögei általában nem egyenlők.

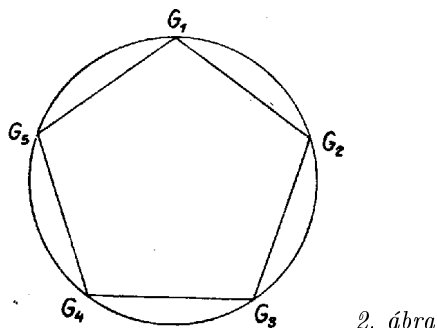
A III. állítás szerint ha egy körbeírt n -szög szögei egyenlők, akkor oldalai is egyenlők. Ez hamis, $n = 4$ esetén a téglalap megfelel a feltételeknek, de oldalai általában nem egyenlők.

A IV. állítás ezt mondja ki: ha egy kör köré írt n -szög szögei egyenlők, akkor oldalai is egyenlők. Ez igaz. Az n -szög bármely két szomszédos oldalának érintési pontjához húzott sugarak szöge ugyanakkora, az n -szög szögének kiegészítő szöge. Ezért bármely két ilyen sugárpár által meghatározott egyenlő szárú háromszög egybevágó, harmadik oldaluk az n -szög két szomszédos oldala érintési pontjának távolsága, mindig ugyanakkora. Ez az oldal az n -szög figyelembe vett két oldalának a közös csúcstól az érintési pontig terjedő szakaszával egyenlő szárú háromszöget alkot, mert, a körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlők. Bármely két ilyen háromszög egybevágó, mert alapjuk és a száruk közti szögük egyenlő. Ezért az n -szög bármely két csúcsából húzott érintőszakaszok egyenlők. Így az n -szög oldalai is egyenlők, mert 2–2 érintőszakaszból tevődnek össze. ($n = 3$ esetén ez az állítás is egyszerűbben adódik a kör felhasználása nélkül.)

Az V. és a VI. állítás az I-nek speciális esete $n = 5$, ill. $n = 6$ esetére, tehát helyes, ugyanígy a XI. és a XII. állítás is, mint a IV-nek speciális esetei.



1. ábra



2. ábra

Megmutatjuk még, hogy a C_5 -re és B_5 -re vonatkozó VII., ill. IX. állítás helyes, a C_6 -ra és B_6 -ra vonatkozó VIII., ill. X. állításra viszont ellenpéldát adunk, ezek általában nem igazak.

A VII. állítás így is kimondható: az egyenlő oldalú $E_1E_2E_3E_4E_5 = \vec{O}$ érintő ötszög szögei egyenlők. Érintse a beírt kör $\vec{O}$ -nek egymás utáni oldalait rendre F_1 -ben, ..., F_5 -ben (1. ábra), és legyen a kör középpontja O . Ekkor a külső pontból húzott érintők egyenlő volta miatt

$$F_5E_1 = E_1F_1 = E_1E_2 - F_1E_2 = E_2E_3 - F_2E_2 = F_2E_3,$$

azaz $\vec{O}$ területét a csúcsok fenti sorrendjében bejárva egy oldalnak az érintési pont és a végpont közti szakasza egyenlő a 2-vel utána következő (valamint a 2-vel előtte levő) oldal megfelelő szakaszával. Továbbmenve

$$F_2E_3 = F_4E_5 = E_5F_5, \quad \text{tehát} \quad F_5E_1 = E_5F_5,$$

F_5 felezi a rajta átmenő E_5E_1 oldalt, és ugyanez áll a további érintési pontokra is. Megrajzolva az OE_i és OF_i szakaszokat ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), mind a 10 keletkező derékszögű háromszög befogói egyenlők, a háromszögek egybevágók, és $\vec{O}$ mindegyik csúcsánál 2-szer akkora szög van, mint e háromszögeknek az OF_i befogóval szemben levő szöge. Ezzel az állítást igazoltuk.

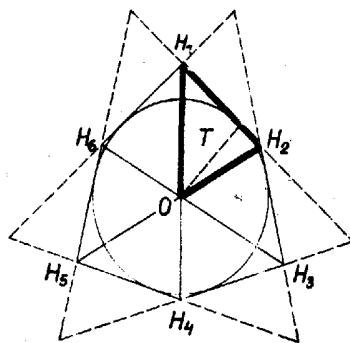
A IX. állítás: az egyenlő szögű $G_1G_2G_3G_4G_5$ húrötszög oldalai egyenlők (2. ábra). Valóban $G_5G_1G_2 \triangleleft = G_1G_2G_3 \triangleleft$ miatt a száruk között levő $G_5G_4G_2$ és $G_1G_5G_3$ ívek egyenlők. Ezért az ezeket teljes körre kiegészítő $G_5G_1G_2$ és

$G_1G_2G_3$ ívek, valamint a közös G_1G_2 részük elhagyásával adódó G_5G_1 és G_2G_3 ívek is, ennél fogva a G_5G_1 és G_2G_3 húrok is egyenlők. Más szóval, az ötszög mindegyik oldala egyenlő a rá következő második oldallal:

$$G_5G_1 = G_2G_3 = G_4G_5 = G_1G_2 = G_3G_4,$$

tehát mind az 5 oldal egyenlő. Ezt akartuk bizonyítani.

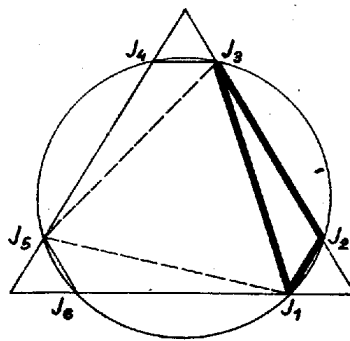
A VIII. állításra térve legyen az $OH_1H_2 = T$ háromszög O -nál levő szöge 60° , további két szöge egymástól különböző hegyesszög, és forgassuk el T -t O körül, mindkét irányban 120° -kal az OH_3H_4 ill. OH_5H_6 helyzetbe (3. ábra). Ekkor az OH_3H_2 , OH_5H_4 , OH_1H_6 háromszögek (tükrösen) egybevágók T -vel, mert pl. $OH_3 = OH_1$ és $H_2OH_3 \angle = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$. Ezért a $H_1H_2H_3H_4H_5H_6$ hatszög oldalai egyenlők, és érintik azt az O körüli kört, melynek sugara T -nek O -ból kiinduló magassága, tehát teljesítik a C_6 feltételt. Ellenben a hatszög bármelyik két szomszédos szöge különböző, mert 2-szer akkora, mint T -nek H_1 -nél, ill. H_2 -nél levő szöge. (Csak minden második szög egyenlő.) Hatszögünk úgy is előállítható, hogy egy szabályos háromszöget a középpontja körül 60° -nál kisebb, tetszős szerinti szöggel elforgatunk és vesszük az eredeti és az új háromszög közös részét.



3. ábra

Végül a X. állításra a következő szerkesztés ad ellenpéldát. Vegyünk egy szabályos háromszöget, és mérjünk fel mindegyik csúcsából a másik két csúcs felé ugyanakkora, az oldal harmadánál kisebb szakaszt (4. ábra). Nyilvánvaló, hogy a 6 végpont által meghatározott konvex hatszög körbe írható és hogy szögei egyenlők, oldalai viszont különbözők. (Csak minden második oldal egyenlő.) – Ezzel állításainkat bebizonyítottuk.

Utóbbi ellenpéldánkat a VIII. állítás ellenpéldájához hasonlóan is származtathatjuk: legyen a $J_1J_2J_3 = U$ háromszögben a J_2 -nél levő szög 120° és $J_1J_2 < J_2J_3$, és forgassuk el U -t a köréje írt kör középpontja körül mindkét irányban 120° -kal.



4. ábra

A VII. és IX. állítások bizonyításában közös elem volt, hogy egy-egy tulajdonság átöröklődött az ötszög valamelyik oldaláról a rá következő második oldalra és hogy 2-2 oldallal előre haladva az idom kerületén, az ötszöget 2-szer körüljárhattuk, az első körüljárásban kimaradt oldalakra is átöröklődhetett a tulajdonság. A VIII. és X. állítások esetében viszont – a hatszögben – 2-2 oldallal előre lépve 3 lépés után visszajutunk a kiindulási oldalhoz, a kihagyott oldalakra később sem juthatunk el, a tulajdonság azokra nem öröklődhet át, ill. azokon más tulajdonság öröklődik. Ebből látjuk, hogy 5 helyére nagyobb páratlan számot írva VII. és IX. megfelelője:

ha C_{2n+1} , akkor P : igaz állítás, illetőleg

ha B_{2n+1} , akkor Q : igaz állítás;

viszont VIII. és X. megfelelője:

ha C_{2n} , akkor P : hamis állítás; illetőleg

ha B_{2n} , akkor Q : hamis állítás.