

Ismételten felhasználjuk a következő azonosságot:

$$(2) \quad (a-b)^2 + (a+b)^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Legyen először $3 - t^2 = a$, $2t = b$. Így az (1) kifejezések négyzetösszege

$$(3) \quad \begin{aligned} S_2 &= 16t^2 + 2[(3 - t^2)^2 + 4t^2] = 2[(3 - t^2)^2 + 12t^2] = \\ &= 2[9 + 6t^2 + t^4] = 2(3 + t^2)^2, \end{aligned}$$

tehát az első állítás helyes, hiszen ha t egész szám, akkor $3 + t^2$ is az.

(1) második és harmadik kifejezésének négyzete így alakul:

$$[(3 - t^2) \mp t^2] = (3 - t^2)^2 + 4t^2 \mp 4t(3 - t^2).$$

Helyettesítsünk most (2)-be $a = (3 - t^2)^2 + 4t^2$ -et és $b = 4t(3 - t^2)$ -et, így az (1) kifejezések negyedik hatványainak összege

$$\begin{aligned} S_4 &= 256t^4 + 2[(3 - t^2)^4 + 8t^2(3 - t^2)^2 + 16t^4 + 16t^2(3 - t^2)^2] = \\ &= 2[(3 - t^2)^4 + 24t^2(3 - t^2)^2 + 144t^4] = 2[(3 - t^2)^2 + 12t^2]^2, \end{aligned}$$

és (3) felhasználásával

$$S_4 = 2(3 + t^2)^4,$$

ami valóban teljes negyedik hatvány kétszerese, amennyiben t egész szám.

Fiala Tibor (Budapest, Rákóczi F. Gimn., I. o. t.)