

I. megoldás. I. Az a , b , c paramétereket egyelőre különbözőknek tekintjük. Vonjuk ki (2)-ből (1)-et, (3)-ból (2)-t, majd a keletkező (7)-nek $(b-a)$ -szorosából (6)-nak $(c-b)$ -szeresét:

$$\begin{aligned}(6) \quad & (b-a)y + (b-a)(a+b)z = B-A, \\(7) \quad & (c-b)y + (c-b)(b+c)z = C-B, \\(8) \quad & (b-a)(c-b)(c-a)z = (b-a)(C-B) - (c-b)(B-A).\end{aligned}$$

Innen kiszámíthatjuk z -t, az eredmény alapján (6)-ból y -t, majd mindkettő alapján (1)-ből x -et. Legyen rövidítésül

$$(b-a)(c-b)(a-c) = k,$$

így kellő átalakítások után, a számlálót A , B és C szerint rendezve

$$(9) \quad z = -\frac{1}{k}[(c-b)A + (a-c)B + (b-a)C],$$

$$(10) \quad y = \frac{B-A}{b-a} - (a+b)z = \frac{1}{k}[(c^2-b^2)A + (a^2-c^2)B + (b^2-a^2)C],$$

$$(11) \quad x = B - by - b^2z = -\frac{1}{k}[bc(c-b)A + ca(a-c)B + ab(b-a)C].$$

Eseteinkben azonban egyszerűbb a behelyettesítés, ha sem (8) jobb oldalán, sem tovább nem bontjuk fel az A , B , C paraméterekből képezett különbségek zárójeleit:

$$(12) \quad \begin{aligned}z &= \frac{1}{k}[(c-b)(B-A) - (b-a)(C-B)], \\y &= -\frac{1}{k}[(c^2-b^2)(B-A) - (b^2-a^2)(C-B)],\end{aligned}$$

$$(13) \quad x = B + \frac{b}{k}[c(c-b)(B-A) - a(b-a)(C-B)].$$

II. Mármost a (4) értékrendszer esetében (12)-ből, (10) első alakjából és (13)-ból

$$z = 0, \quad x = \frac{B-A}{b-a} = -1, \quad x = B + b = a + b + c.$$

Az (5) értékrendszer esetében pedig ugyanezekből az alakokból

$$\begin{aligned}z &= 1, \quad y = \frac{B-A}{b-a} - (a+b) = -(a+b+c), \\x &= B + b(a+c) = ab + bc + ca.\end{aligned}$$

III. Ha a , b , c közül kettő egyenlő, pl. $c = a \neq b$, akkor (3) és (1) bal oldala azonos, ezért a rendszernek vagy nincs megoldása – ha ti. a jobb oldalai nem egyenlők, mert így (3) és (1) ellentmondók –, vagy számtalan sok megoldása van – amennyiben (3) és (1) jobb oldalai egyenlők, mert így a három ismeretlen meghatározására csak két független egyenletünk van. $c = a$ esetén (4)-ben is, (5)-ben is $C = A$, így az utóbbi eset áll fenn. z értékét tetszés szerint választva (9)-ből, majd (1)-ből

$$\begin{aligned}y &= \frac{B-A}{b-a} - (a+b)z, \\x &= A - \frac{a(B-A)}{b-a} + abz = a \frac{bA - aB}{b-a} + abz.\end{aligned}$$

Speciálisan (4), majd (5) esetében:

$$\begin{cases} y = -1 - (a+b)z, \\ x = 2a + b + abz; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -a - (a+b)z, \\ x = a(a+b) + abz. \end{cases}$$

Ha pedig $a = b = c$, akkor – az előírt (4) és (5) esetben – az (1)–(3) egyenletek azonosak, bármelyik két ismeretlen értékét tetszés szerint megválasztva a harmadikat velük kifejezhetjük, számtalan sok megoldás van.

Csirmaz László (Budapest, I. István g. I. o. t.)

II. megoldás. (arra az esetre, ha a , b , c különböző). A feladatot úgy is felfoghatjuk, hogy annak az

$$x + yu + zu^2$$

legfeljebb másodfokú polinomnak az x , y , z együtthatóit keressük, amely az $u = a$, b , c helyeken rendre az A , B , C értéket veszi fel. Megoldhatjuk a feladatot az interpolációs polinomokra vonatkozó ismeretek alapján is.¹ Ez a polinom az idézett cikk (2) és (3) kifejezéseit felhasználva, *Lagrange*-féle alakjában a következő:

$$A \cdot \frac{(u-b)(u-c)}{(a-b)(a-c)} + B \cdot \frac{(u-a)(u-c)}{(b-a)(b-c)} + C \cdot \frac{(u-a)(u-b)}{(c-a)(c-b)},$$

tehát z -t megadja e polinomban u^2 együtthatója, y -t az u együtthatója, x -et pedig az u -t nem tartalmazó tag:

$$Z = \frac{A}{(a-b)(a-c)} + \frac{B}{(b-a)(b-c)} + \frac{C}{(c-a)(c-b)},$$

$$y = -\frac{(b+c)A}{(a-b)(a-c)} - \frac{(c+a)B}{(b-a)(b-c)} - \frac{(a+b)C}{(c-a)(c-b)},$$

$$x = \frac{bcA}{(a-b)(a-c)} + \frac{caB}{(b-a)(b-c)} + \frac{abC}{(c-a)(c-b)}.$$

Ezek a kifejezések könnyen a (9)–(11) alakra hozhatók.

Hasonlóan a keresett polinom *Newton*-féle alakja, az idézett cikk (1) kifejezését megelőző meggondolás felhasználásával, c_1 , c_2 , c_3 helyére e_1 , e_2 , e_3 együtthatót írva, és a polinom előírt értékpárjait (b, B) , (a, A) , (c, C) sorrendben felhasználva

$$\begin{aligned} & e_1 + e_2(u-b) + e_3(u-b)(u-a) = \\ & = B + \frac{B-A}{b-a} \cdot (u-b) + \frac{C-B - \frac{B-A}{b-a} \cdot (c-b)}{(c-b)(c-a)} \cdot (u-b)(u-a); \end{aligned}$$

innen csekély átalakítás után z és x értékét a (12), (13) alakban kapjuk

¹Lásd pl. *Surányi János*: Interpolációs polinomok előállítás, Megjegyzés az 1378. feladathoz, K. M. L. 31 (1965/11) 112-114. o.