

I. megoldás. Először azokat az adatokat használjuk föl, amelyek az összes résztvevőkre vonatkoznak. Legyen az összes résztvevők száma n , így mindenki $n - 1$ személlyel fogott kezét, és az összes kézfogások száma az $n(n - 1)$ szorzat fele, mert a szorzatban minden kézfogást mindkét személynél számításba vettük. Így

$$\frac{n(n - 1)}{2} = 946, \quad n^2 - n - 1892 = 0,$$

ennek pozitív gyöke $n = 44$; negatív gyök ebben a feladatban nem használható.

A nagyobb csoportot küldő A községből 1 táncossal és 1 kísérővel, azaz 2 személlyel voltak jelen többen, mint a B községből, így a B -ből résztvevők teljes száma $(44 - 2)/2 = 21$ személy, az A -belieké pedig 23.

Legyen a jelen levő (összes) fiúk száma F , akkor a lányoké $44 - F$. Így a közülük összeállítható fiú-leány párok száma

$$F(44 - F) = 484, \quad \text{ebből} \quad F^2 - 44F + 484 = (F - 22)^2 = 0,$$

tehát $F = 22$, és a lányok száma szintén 22.

Legyen az A -beli fiú-résztvevők száma a , ekkor az A -beli lányoké $23 - a$, a B -beli fiúké $22 - a$, a lányoké $21 - (22 - a) = a - 1$. Egy A -beli fiú és egy B -beli leány $a(a - 1)$ -féleképpen állítható párba, a fordított párbaállítások száma $(22 - a)(23 - a)$, innen

$$a(a - 1) + (22 - a)(23 - a) = 246, \quad a^2 - 23a + 130 = 0.$$

Az adódó $a_1 = 10$ és $a_2 = 13$ gyökökből két lehetőség jön szóba. Vagy a fiúk összetétele volt ez: A -beli 10 és B -beli 12 – és ekkor a lányoké: A -beli 13 és B -beli 9, – vagy fordítva. (Ez előre látható volt a fiúk és lányok össz-létszámának egyenlő voltából, valamint abból, hogy minden ilyen párbaállításban a fiú, leány szavakat felcserélve újra helyes párt kapunk.)

Áttérünk a csak a táncosokra vonatkozó adatok fölhasználására. Jelöljük az összes fiú-táncosok számát f -fel, így a leány-táncosok száma $f - 1$. Mivel a belőlük összeállítható táncos párok száma

$$f(f - 1) = 306, \quad f^2 - f - 306 = 0,$$

azért $f = 18$ (a negatív gyök itt sem használható). Eszerint 17 leány táncos volt, összesen 35 táncos, és a kísérők száma $44 - 35 = 9$. Továbbá a B községből való volt $(35 - 1)/2 = 17$ táncos és $21 - 17 = 4$ kísérő, így pedig az A csoport 18 táncosból és 5 kísérőből állt. Azt is megtudtuk ebből, hogy kísérők közül $22 - 18 = 4$ fiú és $9 - 4 = 5$ leány.

Legyen az A -beli fiú táncosok száma t , ekkor az A -beli lányoké $18 - t$, a B -beli fiúké $f - t = 18 - t$ (véletlen egyezés), a B -beli lányoké pedig $17 - (18 - t) = t - 1$. Így az A csoportban $t(18 - t)$ táncos párt lehetett összeállítani, a B csoportban pedig $(18 - t)(t - 1)$ párt. Ezek összegét ismerjük:

$$t(18 - t) + (18 - t)(t - 1) = -2t^2 + 37t - 18 = 150,$$

$$2t^2 - 37t + 168 = 0.$$

Ennek az egyenletnek két pozitív szám tesz eleget, 8 és 10,5, az utóbbi azonban itt nem felel meg, tehát A községből 8 fiú és 10 leány táncos volt jelen, B -ből pedig 10 fiú és 7 leány-táncos.

Eszerint a fenti $a_2 = 13$ -ból kapott összeállítás nem lehetséges, hiszen abban a B -beli fiú résztvevők száma kevesebb, mint a B -beli fiú táncosoké. Most már a kísérők faluk és nemek szerinti összetételét megkapjuk, ha a táncosok adatait kivonjuk az összes résztvevők eloszlására maradt egyetlen lehetőség adataiból.

Mindezek szerint az A csoport 8 táncos fiúból, 10 táncos leányból, 2 kísérő fiúból és 3 kísérő leányból állt, a B csoportban pedig ugyanezek a számok rendre 10, 7, 2, 2.

Dobozy Ottó (Budapest, Apáczai Csere J. Gyak. g. II. o. t.)

Horváth Sándor (Budapest, I. István g. II. o. t.)

II. megoldás. Először azokat az adatokat használjuk fel, amelyek csak a táncosokra vonatkoznak. Legyen a két csoport táncos leányainak együttes száma x , így az összes táncos fiúké $x + 1$. Ekkor a táncosokból alakítható párok száma, tekintet nélkül a falujukra,

$$x(x + 1) = 306.$$

Eszerint 306-ot két szomszédos természetes szám szorzatára kell bontanunk. Törzsszámhatványok szorzataként $306 = 2 \cdot 3^2 \cdot 17$, így két-tényezős szorzat-előállításai $1 \cdot 306 = 2 \cdot 153 = 3 \cdot 102 = 6 \cdot 51 = 9 \cdot 34 = 17 \cdot 18$, közülük csak az utolsó felel meg. Eszerint táncos leány 17 volt, táncos fiú 18, együtt 35-en voltak. S mivel a nagyobb A -csoportban 1-gyel több volt a táncos, A -ból 18-an, B -ből 17-en táncoltak a műsorban.

Legyen a B -beli táncos leányok száma y , ekkor az A -belieké $17 - y$, a táncos fiúk pedig B -ben $17 - y$, A -ban $y + 1$. Így az ugyanazon falubeli táncosok párba állítási lehetőségeinek száma

$$y(17 - y) + (17 - y)(y + 1) = 33y - 2y^2 + 17 = 150,$$

$$y(33 - 2y) = 133.$$

Eszerint 133-at úgy kell felbontanunk két természetes szám szorzatára, hogy az egyik tényező 2-szeresét a másikhoz adva 33-at kapjunk. Mivel $133 = 1 \cdot 133 = 7 \cdot 19$ (az utóbbiban mindkét tényező prímszám), könnyű belátni, hogy csak $y = 7$ felel meg. A B -csoportban 7 leány és 10 fiú táncolt, az A -ban pedig 10 leány és 8 fiú.

Jelöljük az összes leányok számát z -vel, az összes fiúkét u -val, ekkor egyrészt $zu = 484$, másrészt $z \geq 17$, $u \geq 18$. A $484 = 2^2 \cdot 11^2$ számot ennek megfelelően kell két természetes szám szorzatára bontanunk. Ennek egyedüli lehetősége $z = 22$, $u = 22$.

Így a kísérők között $z - 17 = 5$ leány volt, és $u - 18 = 4$ fiú. Együtt 9-en voltak, közülük 1-gyel több volt az A -beli, tehát A -ból 5, B -ből 4 kísérő volt.

Legyen az A -beli kísérők közül v leány, ekkor $5 - v$ a fiú, a B -beliek közül $5 - v$ a leány, és $v - 1$ a fiú. Továbbá A -ban az összes leányok száma $10 + v$, az összes fiúké $13 - v$, B -ben ugyanezek a számok $12 - v$, ill. $9 + v$. Így egy A -beli leány és egy B -beli fiú párba állítására $(10 + v)(9 + v)$ lehetőség van, a fordított párosra pedig $(12 - v)(13 - v)$. Innen

$$(10 + v)(9 + v) + (12 - v)(13 - v) = 246, \quad v(v - 3) = 0.$$

Nem lehet azonban $v = 0$, mert a B -beli kísérő fiúk $v - 1$ száma alapján v legalább 1, így $v = 3$, ebből már megkapjuk az I. megoldásban talált összeállításokat.

Nem használtuk azonban fel a 946 kézfogásra vonatkozó adatot, ezért a megoldást csak akkor fogadhatjuk el, ha eredményeink teljesítik ezt az előírást. $z = u = 22$ -ből az összes jelenlevők száma 44, mindenki 43 személlyel fogott kezet, így a kézfogások száma $44 \cdot 43/2$, hiszen a szorzatban minden egyes kézfogást mindkét személynél számításba vettünk. Ez a szám 946, megfelelő. – Az utolsó adat megadása fölösleges volt.

Fialovszky Alice (Budapest, Patrona Hungariae g. I. o. t.)

Backhausz Beáta (Budapest, Ságvári E. Gyak. g. I. o. t.)