

Elég azt belátnunk, hogy a szorzat kifejtett alakjában különválasztva azokat a tag-tag-szorzatokat, melyeknek legalább egyik tényezője az adott tényezők utolsó tagja, a különválasztott szorzatok S összege 0. S a következő alakban írható:

$$S = \frac{64}{(a-2)a^2} \left(a^2 - 2a + 4 - \frac{8}{a} + \frac{16}{a^2} \right) - \frac{64}{(a+2)a^2} \left(a^2 + 2a + 4 + \frac{8}{a} + \frac{16}{a^2} \right) - \frac{64^2}{(a^2-4)a^4}.$$

A második zárójelbeli kifejezésből $1/a^2$ -et kiemelve felismerjük, hogy a benn maradó kifejezés olyan szerkezetű, mint amelyet $a^n - b^n$ szorzattá alakításában használtunk; itt $n = 5$, és b helyén 2 áll, ezért

$$a^4 + 2a^3 + 4a^2 + 8a + 16 = \frac{a^5 - 2^5}{a - 2}.$$

Ugyanígy az első zárójelben b helyén -2 -t látunk, ezért

$$a^2 - 2a + 4 - \frac{8}{a} + \frac{16}{a^2} = \frac{a^5 + 32}{(a+2)a^2}.$$

Ezek alapján S egyszerűbb alakban írható:

$$S = \frac{64}{(a-2)a^2} \cdot \frac{a^5 + 32}{(a+2)a^2} - \frac{64}{(a+2)a^2} \cdot \frac{a^5 - 32}{(a-2)a^2} - \frac{64^2}{(a-4)a^4}.$$

A három tag nevezője közös, elég a számlálók összegét vizsgálnunk. Valóban

$$64(a^5 + 32) - 64(a^5 - 32) + 64^2 = 0.$$

Ezzel igazoltuk az állítást.

Kuluncsich Tibor (Baja, Tóth K. g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. A fenti átalakítások alapján (1) tényezői így alakíthatók:

$$\begin{aligned} \frac{a^5 - 32}{(a-2)a^2} + \frac{64}{(a-2)a^2} &= \frac{a^5 + 32}{(a-2)a^2}, \quad \text{ill.} \\ \frac{a^5 + 32}{(a+2)a^2} - \frac{64}{(a+2)a^2} &= \frac{a^5 - 32}{(a+2)a^2}. \end{aligned}$$

A jobb oldali számlálók felcserélve egyenlők a bal oldali első törtek számlálóiival (a nevezők pedig felcserélés nélkül egyenlők), ezért a jobb oldalak (a teljes kifejezések) szorzata egyenlő a bal oldali első tagok (a megrövidített kifejezések) szorzatával. Így magát a szorzatot is megkaptuk rövidebb alakban.

Lengyel Tamás (Budapest, Berzsenyi D. g. I. o. t.)

2. Többen a fenti felismerést úgy mondták ki, hogy az (1)-beli tényezők első $5 - 5$ tagja mértani sorozatot alkot.