

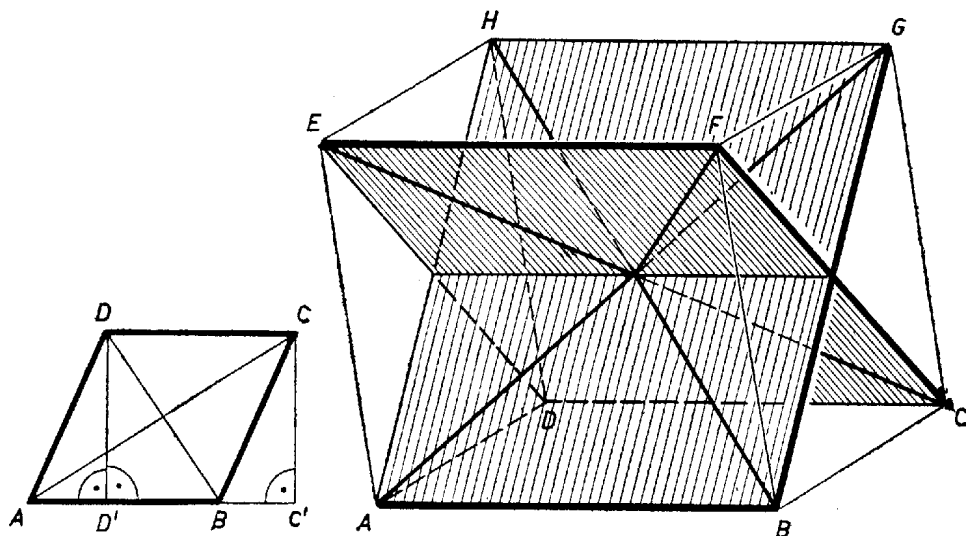
a) Derékszögű paralelogrammában az állítás érvényessége nyilvánvaló. Legyen az $ABCD$ paralelogrammában $AB \geq AD$ és $\angle BAD < \angle ABC$. Ekkor az AB egyenest a rá D -ből bocsátott magasság A és B között metszi egy D' pontban, a C -ből húzott magasság pedig a B -n túli C' -ben. Így az ACC' és BDD' derékszögű háromszögekből Pitagorasz tétele alapján

$$\begin{aligned} AC^2 &= (AB + BC')^2 + CC'^2 = AB^2 + 2AB \cdot BC' + (BC'^2 + CC'^2), \\ BD^2 &= (AB - AD')^2 + DD'^2 = AB^2 - 2AB \cdot AD' + (AD'^2 + DD'^2), \end{aligned}$$

ezek összegéből pedig, figyelembe véve az $AB = CD$, $AD' = BC'$ egyenlőségeket, valamint hogy a zárójelekben a BCC' és ADD' derékszögű háromszögek befogóinak négyzetösszege áll:

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + BC^2 + AD^2.$$

Ezt kellett bizonyítanunk.



b) Legyen a hasáb alapja az $ABCD$, fedőlapja az $EFGH$ paralelogramma úgy, hogy az oldalélek AE , BF , CG , DH . A hasáb oldallapjai is paralelogrammák, így $AB \parallel CD \parallel GH \parallel FE$. Ezért az $ABGH$ és $CDEF$ négyszögek is paralelogrammák, és a hasáb AG , BH , CE , DF testátlói e két paralelogramma átlói. A bizonyítandó állítást úgy kapjuk, hogy az a) részben bebizonyított tételt alkalmazzuk az $ABGH$, $CDEF$, $BCGF$, $ADHE$ paralelogrammákra, az egyenlőségeket összeadjuk és a két oldalon fellépő azonos tagokat – az utóbbi két paralelogramma átlóinak négyzetét – elhagyjuk:

$$\begin{aligned} AG^2 + BH^2 &= AB^2 + GH^2 + BG^2 + AH^2, \\ CE^2 + DF^2 &= CD^2 + EF^2 + CF^2 + DE^2, \\ BG^2 + CF^2 &= BC^2 + FG^2 + BF^2 + CG^2, \\ AH^2 + DE^2 &= AD^2 + EH^2 + AE^2 + DH^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &AG^2 + BH^2 + CE^2 + DF^2 = \\ &= (AB^2 + CD^2 + GH^2 + EF^2) + (AD^2 + BC^2 + FG^2 + EH^2) + \\ &\quad + (AE^2 + BF^2 + CG^2 + DH^2). \end{aligned}$$

Scherer Ferenc (Esztergom, Temesvári Pelbárt g. II. o. t.)