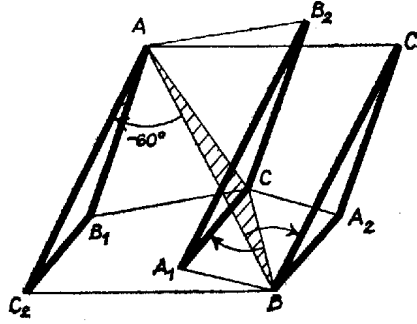
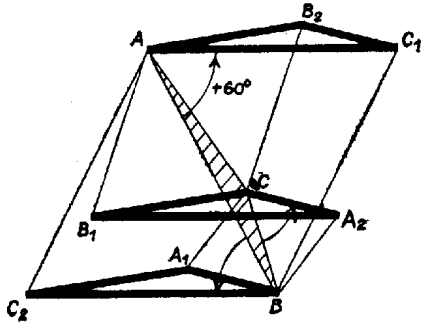


I. Válasszuk az adott háromszög betűzését úgy, hogy csúcsait A, B, C sorrendben körüljárva a háromszög belseje az útvonaltól balra legyen, más szóval ABC pozitív körüljárást adjon. Legyenek az oldalakra befelé írt háromszögek ABC_1, BCA_1, CAB_1 , a kifelé írtak BAC_2, CBA_2, ACB_2 (1. a – 1. b ábrák). A feltevés szerint az $AC_1B_2, C_2BA_1, B_1A_2C$ háromszögek úgy keletkeznek az ABC háromszögből, hogy ezt rendre az A, B, C pont körül a pozitív forgási irányban 60° -kal elfordítjuk, ezért az AB, BC, CA oldalak új helyzetei hármasával egyenlő és párhuzamos szakaszokat adnak:

$$(1) \quad AC_1 \# C_2B \# B_1A_2, \quad C_1B_2 \# BA_1 \# A_2C, \quad B_2A \# A_1C_2 \# CB_1.$$



1.a. és 1.b. ábra

Bármelyik szakaszhármast két szakasza egy paralelogramma két szemben fekvő oldalát adja. Egy hármastól két szakaszt 3-féleképpen választhatunk ki – ti. azzal, hogy egymás után mindegyiket egyszer nem választjuk bele a szakaszpárba, így a 3 hármastól $3 \cdot 3 = 9$ féleképpen kaphatjuk egy-egy paralelogramma csúcsait.

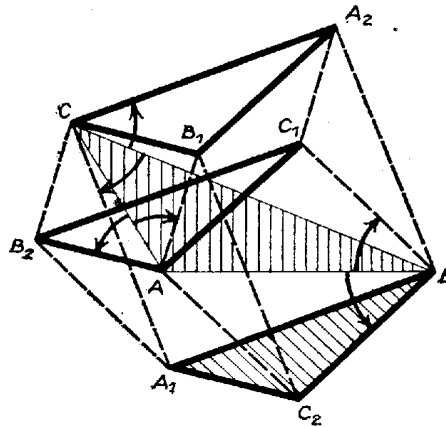
Hasonlóan az $AC_2B_1, C_1BA_2, B_2A_1C$ háromszögek az ABC háromszögnek A , majd B , végül C körüli, negatív irányú 60° -os elfordítottjai, ezért az

$$(2) \quad AC_2, C_1B, B_2A_1; \quad C_2B_1, BA_2, A_1C; \quad B_1A, A_2C_1, CB_2$$

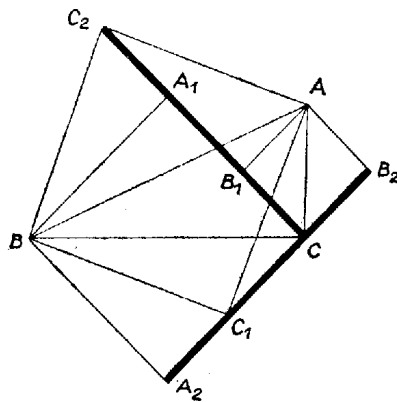
szakaszhármastok bármelyik párja is paralelogrammát ad, de ezek azonosak a fentiekkel, most mindegyiküket az előbb nem említett oldalpárjuk révén kaptuk meg.

Amennyiben az ABC háromszögben van 60° -os vagy 120° -os szög, egy-egy szakaszpár egy egyenesre esik, egy-egy paralelogramma elfajul egyenesszakasszá.

II. Az oldalak fölé egyenlő szárú derékszögű háromszögeket rajzolva minden ilyen háromszögben a szárak – vagyis a befogók – $\sqrt{2}$ -ször kisebbek az átfogónál, az eredeti háromszög megfelelő oldalánál, másrészt az átfogón levő szögek mindegyike 45° . Eszerint – ismét a fenti betűzést használva – a fenti két háromszög-hármas mindegyik tagja *forgatva nyújtással* keletkezik az eredeti háromszögből, a forgatás szöge 45° , iránya a két háromszög-hármasban megegyező, a nyújtás aránya $1/\sqrt{2}$, ezért az (1) és (2) szakaszhármastok tagjai között ismét fennáll az egyenlőség és a párhuzamosság, az állítás érvényes marad (2. ábra).



2. ábra



3. ábra

Derékszögű háromszögből kiindulva itt is elfajulások állnak be (3. ábra).

Berács József (Győr, Czuczor G. g. II. o. t.) dolgozatából kiegészítésekkel

Megjegyzés. Szabályos háromszögben az I. eset pontrendszere csak 6 pontból áll, és 3 paralelogrammát tartalmaz. Az említett elfajulásokkal szemben egyes speciális esetekben viszont újabb paralelogrammák léphetnek fel, pl. az I. esetben a 30° , 60° , 90° , a 30° , 30° , 120° szögű háromszögben.