

I. A feltevés miatt a BCS egyenlő szárú háromszög BE magassága felezi a CS alapot. Másrészt S harmadolja a C -ből induló CF súlyvonalat, így $SF = SC/2 = SE$, tehát $FE = 2FS$, $FC = 3 \cdot FS$. Az FCD és FBE közös hegyesszöggel bíró derékszögű háromszögek hasonlók, ezért

$$(1) \quad \begin{aligned} FD : FC &= FE : FB, \\ FD \cdot FB &= FD(FD + DB) = FC \cdot FE = 6 \cdot FS^2. \end{aligned}$$

Az ABC derékszögű háromszög magasságára fennáll:

$$CD^2 = AD \cdot BD = 2FD \cdot BD,$$

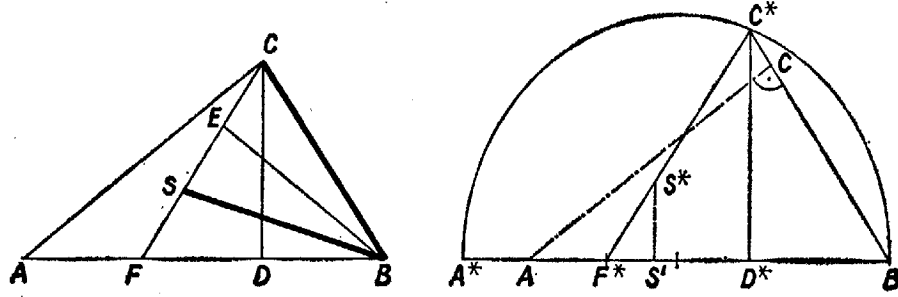
így a CFD derékszögű háromszögből

$$(2) \quad FD^2 + CD^2 = FC^2, \quad \text{azaz} \quad FD^2 + 2FD \cdot BD = 9 \cdot FS^2.$$

Kivonva (1) háromszorosából (2) kétszeresét:

$$FD(3FD + 3DB - 2FD - 4BD) = FD(FD - BD) = 0.$$

Nem lehet $FD = 0$, ezért $FD - BD = 0$, azaz $FD = BD$, $AD = 2BD$, vagyis a D talppont harmadolja az AB átfogót.



II. A talált tulajdonság alapján a keresetthez hasonló háromszöget szerkeszthetünk, ezt pedig hasonlósági transzformációval a kívánt méretűre nagyíthatjuk. A 2. ábrán B -től 3-szor mértük fel a BD^* szakaszt, a végpont A^* , az A^*B átmérőjű félkör és a D^* -ban BD^* -ra állított merőleges metszéspontja C^* , a BC^* félegyenest felmértük az adott BC szakaszt és a végpontban állított merőlegessel a BD^* félegyenestől kimetszettük A -t.

Elég azt bizonyítanunk, hogy az $A^*C^*D^*$ háromszög S^* súlypontjára nézve $S^*B = C^*B$, mert így a nagyításban $SB = CB$ lesz. Legyen S^* vetülete a BA^* -on S' , és D^*A^* felezőpontja F^* . Így $S^*S' = C^*D^*/3$, továbbá $S'D^* = 2F^*D^*/3 = A^*D^*/3 = 2BD^*/3$, $S'B = 5BD^*/3$, és a szerkesztésnél fogva $C^*D^{*2} = A^*D^* \cdot BD^* = 2BD^{*2}$, hiszen BA^*C^* derékszögű háromszög.

Ezért

$$\begin{aligned} BS^{*2} &= S^*S'^2 + S'B^2 = \frac{C^*D^{*2}}{9} + \frac{25BD^{*2}}{9} = \frac{C^*D^{*2}}{9} + \frac{16BD^{*2}}{9} + \\ &+ BD^{*2} = \frac{C^*D^{*2}}{9} + \frac{8C^*D^{*2}}{9} + BD^{*2} = C^*D^{*2} + BD^{*2} = BC^{*2}, \end{aligned}$$

tehát valóban $BS^* = BC^*$.

Szentmiklósi László (Kiskunhalas, Szilády Á. g. I. o. t.)

Megjegyzések. 1. A BCS háromszög közvetlenül megszerkeszthető abból, hogy $CS = 2CF/3 = 2BC/3$, az adott szakasz $2/3$ része, hiszen a talált összefüggés szerint $FCD\Delta \simeq BCD\Delta$.

2. A vizsgált kérdéshez kapcsolódik az 1057. gyakorlat.¹

¹Lásd ezen számban 221. old.