

A szokásos jelöléseket használva a követelmény:

$$s = k^2, \quad s - a = l^2, \quad s - b = m^2, \quad s - c = n^2,$$

ahol k, l, m, n természetes számok. Az utolsó három egyenlet összegét az elsővel egybevetve

$$(s - a) + (s - b) + (s - c) = 3s - (a + b + c) = 3s - 2s = s,$$

így a keresett természetes számokra teljesülnie kell az

$$(1) \quad l^2 + m^2 + n^2 = k^2$$

egyenletnek. Ennek az egyenletnek minden megoldása egy megfelelő számhármast ad:

$$(2) \quad a = s - l^2 = k^2 - l^2, \quad b = k^2 - m^2, \quad c = k^2 - n^2,$$

ugyanis ezekre szükségképpen teljesülnek a háromszög egyenlőtlenségek, hiszen ha pl.

$$0 < s - a = \frac{b + c - a}{2}, \quad \text{akkor} \quad b + c > a.$$

Megmutatjuk, hogy l értékét tetszés szerinti természetes számnak, m -ét pedig tetszés szerinti páros számnak választva (1)-nek egy megoldását kapjuk. Ugyanis $l^2 + m^2 = M$ jelöléssel

$$k^2 - n^2 = (k - n)(k + n) = M,$$

és itt M mindig felbontható olyan u, v természetes számpár ($u < v$) szorzatára, hogy a

$$k - n = u, \quad k + n = v$$

rendszerből

$$(3) \quad k = \frac{v + u}{2}, \quad n = \frac{v - u}{2}$$

természetes számok. Valóban, ha l páratlan, akkor M is páratlan, és mindenestre megfelel $u = 1, v = M$ (> 1), mert így a (3)-beli törtek számlálója páros szám; ha pedig l páros szám, akkor M osztható 4-gyel, mert mindkét tagja osztható vele, így $u = 2$ és $v = M/u = M/2$ (> 2) mindegyike páros, k és n ismét természetes szám.

Mindenestre egyenlő szárú háromszöget kapunk $l = m$ választással. Legyen pl. $l = m = 2$, így $M = 8$; a fentiek szerint $u = 2$ és $v = 4$ választással (3)-ból, majd (2)-ből $k = 3, n = 1, a = b = 5, c = 8, s = 9$ és $t = klmn = 12$.

Az $l \neq m$ választás nem biztosítja, hogy a háromszög oldalai különbözők legyenek – pl. $l = 1, m = 2$ az előbbi példára vezet –, azonban néhány próba után a második követelményt kielégítő megoldást is kapunk: az $l = 3, m = 2$ számpárból kiindulva $k = 7, n = 6, a = 40, b = 45, c = 13; s = 49, t = 252$.

Koren András (Budapest, I. István g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Úgy is kaphatunk megoldást (1)-re, hogy egy tetszés szerinti pitagoraszai számhármashoz – pl. 3, 4, 5 – olyan másikat keresünk, melyben az első hármas átfogószáma az egyik befogószám szerepét játssza, a példát folytatva 5, 12, 13. Így $k = 13, l = 3, m = 4, n = 12; a = 160, b = 153, c = 25$. Ennél azonban kisebb háromszög oldalhármast is találhatók.

Mérő László (Budapest, Berzsenyi D. g. II. o. t.)

2. Több dolgozatban olvasható, hogy keresni kellene a pitagoraszai számhármast megadó $(u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = (u^2 + v^2)^2$ azonossághoz hasonló olyan azonosságot, amelyből (1)-re több megoldás képezhető (ugyanis a közkezen forgó gyűjteményekben ilyen nem található). Néhányan közöltek is ilyet.

Minden páros m szám négyzetéhez található olyan l, n egész számpár, hogy $2ln = m^2$. Ekkor (1) bal oldala $l^2 + 2ln + n^2 = (l + n)^2$, tehát $k = l + m^2/2l$. (Pl. $m = 2, l = 1, n = 2, k = 3$.) A törtek kiküszöbölésével a $(2l^2)^2 + (2lm)^2 + (m^2)^2 = (2l^2 + m^2)^2$ azonosság adódik, amely az l, n paraméterek bármely pozitív egész értékpárja esetére megoldást ad (de nem ad meg minden megoldást; *Rajczy Péter*, Bp., Eötvös Gimn.).

Egy másik, 2 paraméteres megoldás: $(2uv)^2 + (4uv)^2 + (u^2 - 5v^2)^2 = (u^2 + 5v^2)^2$ (*Moson Péter*, Bp., Fazekas Gimn.).

Egy 1 paraméteres megoldás: $u^2 + (u + 1)^2 + [u(u + 1)]^2 = [u(u + 1) + 1]^2$ (*Takács László*, Sopron, Széchenyi Gimn.). Ebből $u = 3$ esetén a már látott 3, 4, 12, 13 megoldás adódik.

Lásd még az ezen számban kitűzött 1085. gyakorlatot.