

I. A kérdéses másodfokú polinom $x^2 + px + q$ alakú, mert x^2 együtthatója csak 1 lehet.

$$(x^2 + px + q)^2 = x^4 + 2px^3 + (p^2 + 2q)x^2 + 2pqx + q^2$$

akkor és csak akkor azonos (1)-gyel, ha az

$$(3) \quad a = 2p, \quad b = p^2 + 2q, \quad c = 2pq, \quad d = q^2$$

egyenlőségek mindegyike teljesül. Ezeket (2) bal oldalába beírva valóban

$$8p^3q^2 - 8pq^2(p^2 + 2q) + 16pq^3 = 0.$$

Pl. az $(x^2 + 3x + 2)^2$ polinom esetében $p = 3$, $q = 2$; $a = 6$, $b = 13$, $c = 12$, $d = 4$, ezeket (2) bal oldalába helyettesítve valóban 0-t kapunk.

II. Egyetlen példa elég annak megmutatására, hogy nem minden a (2)-t kielégítő a , b , c , d számnégyeshez létezik a kérdéses $x^2 + px + q$ polinom. Ilyen pl. $a = 1$, $b = c = d = 0$, mert $x^4 + x^3$ nem négyzete semmilyen polinomnak. (Látható ez (3)-ból is, az utolsó egyenletből $q = 0$, így a másodikból $p = 0$, ezek a harmadik egyenletet kielégítik, de az első nem.)

Általában a p , q számpárt mindig meghatározza a , b , c , d közül már kettőnek az értéke (3) megfelelő egyenletei alapján (esetenként több megoldás is lehet, de mindenesetre véges számú), és ezek a további két egyenletet általában nem elégítik ki. Viszont (2) teljesíthető akkor is, ha a p , q meghatározásához felhasznált két betűn túl egy harmadiknak az értékét is megválasztottuk, pl. bármely a , c , d értékhármassal esetén a $b = (ac^2 + 8cd)/4$ ad értékkel – hacsak a , d egyike sem 0, különben pedig bármely b -vel.

Sass Éva (Szekszárd, Garay J. g. I. o. t.)

Megjegyzés. A (2) összefüggés kiadódik, ha (3)-ból p -t és q -t küszöböljük ki. Az első és a harmadik egyenlet fölhasználásával $p = a/2$, $q = c/2p = c/a$, ezeket a második egyenletbe helyettesítve, majd a negyedik fölhasználásával $a^2 = (c/q)^2 = c^2/d$ -t írva:

$$b = \frac{a^2}{4} + \frac{2c}{a} = \frac{c^2}{4d} + \frac{2c}{a}.$$

Eszerint (2) következménye (3)-nak, de természetesen nem ekvivalens vele.