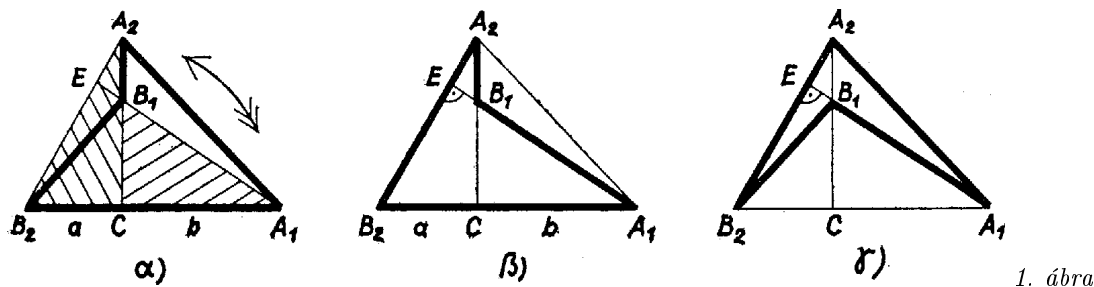


I. Legyen az  $A_1B_1C = D_1$  derékszögű háromszögben  $B_1C = a \leq CA_1 = b < A_1B_1 = c$ , és forgassuk  $D_1$ -et  $C$  körül az  $A_2B_2C = D_2$  helyzetbe úgy, hogy  $A_2$  a  $CB_1$  félegyenesen legyen; ekkor  $B_2$  az  $A_1C$  félegyenesen van,  $B_1$  pedig az  $A_1A_2B_2$  háromszög belsejében, vagy azonos  $A_2$ -vel. (A forgatás iránya nem lényeges, mert az 1, 2 indexeket felcserélve  $D_1$  ellentétes irányú fordulással jut  $D_2$ -be, és a vizsgálandó alakzat csúcspontjai mégis ugyanazok a pontok.)



1. ábra

Az  $A_1A_2B_1B_2 = N_1$  négyszög (1. ábra  $\alpha$  része) két átlója a  $D_1$  és  $D_2$  átfogója, így egyenlők és a forgatás miatt merőlegesek. Messe az  $A_1B_1$  egyenes  $A_2B_2$ -t  $E$ -ben, ekkor, idomok területét ugyanúgy jelölve, mint magukat az idomokat:

$$\begin{aligned} N_1 &= A_1B_1A_2 + A_1B_1B_2 = \frac{A_1B_1 \cdot A_2E}{2} + \frac{A_1B_1 \cdot EB_2}{2} = \\ &= \frac{A_1B_1}{2}(A_2E + EB_2) = \frac{A_1B_1 \cdot A_2B_2}{2} = \frac{c^2}{2}, \end{aligned}$$

másrészt a  $B_1C$  szakasz mentén kettévágva

$$N_1 = A_1A_2C + B_1B_2C = \frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2},$$

és e két előállítás egyenlősége Pitagorasz tételét adja. – A  $b = a$  esetében  $B_1$  azonos  $A_2$ -vel és  $E$ -vel is, így  $N_1$  elfajul az  $A_1B_1B_2$  egyenlő szárú derékszögű háromszöggé, és a bizonyítás még egyszerűbbé válik.

Felhasználtuk a következő tételeket: forgatás változatlanul hagyja az idom oldalait és szögeit, részekre bontott idom területe egyenlő összes részei területének összegével, továbbá a háromszög területképletét. Egyik tétel bizonyításában sem használtuk fel a bizonyítandó tételt, így bizonyításunk helyes.

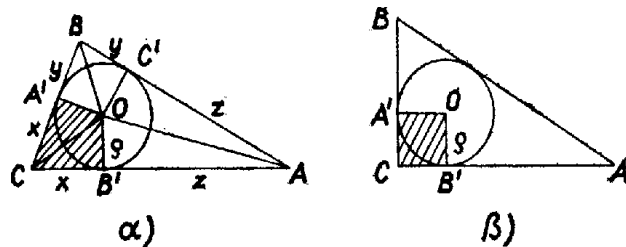
II. A beírt kör sugarának ajánlott kifejezése így alakítható:

$$\varrho = \frac{s}{2} - c = \frac{1}{2}(a + b - c).$$

Ezt az ajánlott területképletbe beírva, másrészt a területet a befogókkal is kifejezve

$$t = s\varrho = \frac{1}{2}(a + b + c) \cdot \frac{1}{2}(a + b - c) = \frac{1}{4}[(a + b)^2 - c^2] = \frac{1}{2}ab,$$

amiből átrendezéssel  $a^2 + b^2 = c^2$ .



2. ábra

A  $t = \varrho s$  képlet a háromszög három,  $\varrho$  magasságú háromszögre bontásából adódik (2. ábra  $\alpha$  része) – alapjaik az egyes oldalak – ezekre alkalmaztuk a területképletet. A sugár képlete abból adódik, hogy a kör  $O$  középpontja, a háromszög egy csúcsa, és a belőle húzott érintők érintési pontjai, pl.  $C$ ,  $A'$  és  $B'$ , mindig egy deltoid csúcsai, az érintőszakaszok egyenlők, együttes hosszuk a kerületből az  $AB$  oldal kétszeresének elhagyásával adódik, továbbá hogy  $ACB \angle = 90^\circ$  esetén e deltoid négyzetté specializálódik (2. ábra  $\beta$  része), oldalai egyenlők. Ezekben sem használtuk fel Pitagorasz tételét.

*Megjegyzések.* Az I. részben az  $A_1, B_1, A_2, B_2$  csúcsokat két további sorrend szerint bejárva ugyancsak konkáv négyszöget kapunk. Ezekből is kapunk egy-egy, a fentitől különböző bizonyítást.

Az  $A_1B_1A_2B_2 = N_2$  négyszög területét (1. ábra  $\beta$  része) egyrészt  $D_1$  és  $D_2$  összegeként, másrészt az  $A_1A_2B_2$  és  $A_1A_2B_1$  háromszögek különbségeként állítjuk elő.  $A_2B_1E$  és  $D_1$  hasonló, ezért

$$B_1E = e = \frac{B_1A_2}{B_1A_1} \cdot B_1C = \frac{a(b-a)}{c}, \quad A_1E = c + e = \frac{c^2 + ab - a^2}{c},$$

$$N_2 = A_1A_2B_2 - A_1A_2B_1 = \frac{c \cdot A_1E}{2} - \frac{b(b-a)}{2} = 2D_1 = ab,$$

$$\frac{1}{2}(c^2 + ab - a^2 - b^2 + ab) = ab,$$

és ez rendezéssel a tételt adja. – A fenti tételeken túl felhasználtuk, hogy két idom különbségeként előálló idom területe egyenlő azon idomok területének különbségével, és hogy hasonló idomok megfelelő oldalainak aránya egyenlő.

Végül az  $A_1A_2B_2B_1 = N_3$  négyszögre (1. ábra  $\gamma$  része) hasonlóan

$$N_3 = A_1A_2B_2 - A_1B_1B_2 = A_1A_2B_1 + B_2A_2B_1 = \frac{B_1A_2 \cdot A_1B_2}{2},$$

$$c(c+e) - a(a+b) = c^2 - 2a^2 = b^2 - a^2,$$

ezt kellett bizonyítanunk.  $B_1 = A_2$  esetén  $N_3$  területe 0.