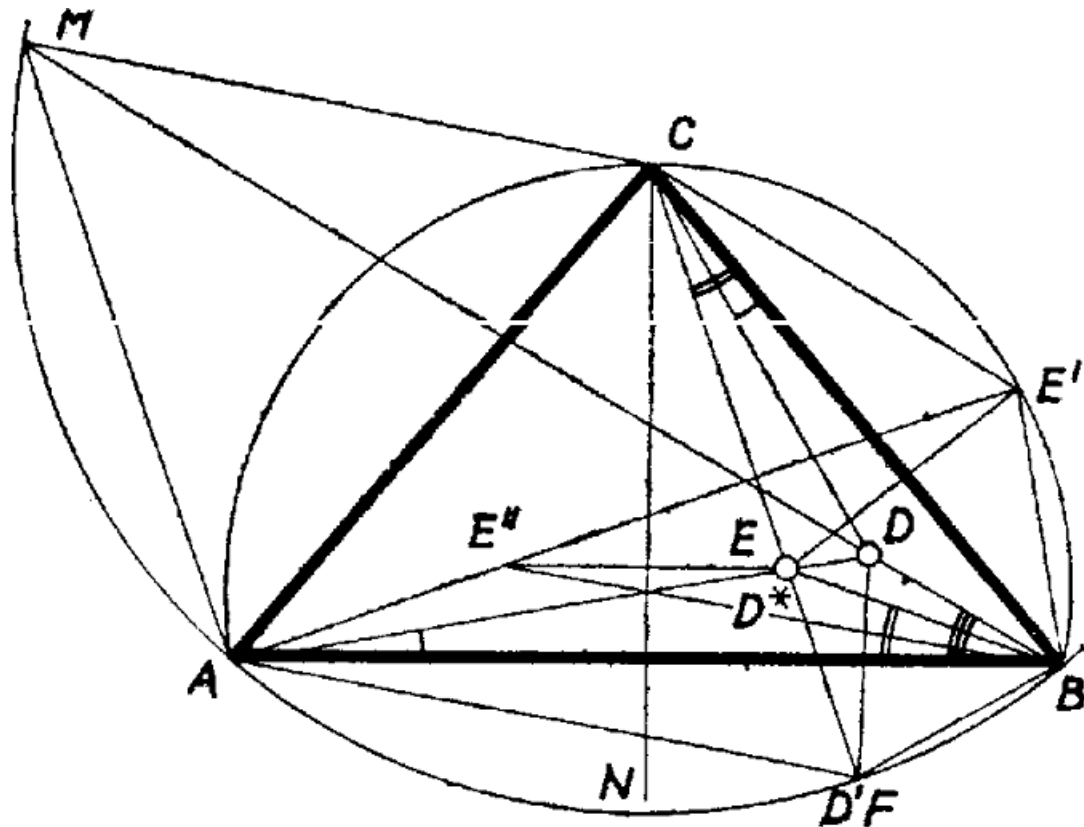


I. megoldás. Az ABC háromszög A -nál és B -nél levő szöge 50° , így $\angle EBC = 30^\circ$. Legyen E tükörképe BC -re E' (1. ábra), ekkor az $EBE'\triangle$ szabályos, mert $\angle EBE' = 2 \cdot \angle EBC = 60^\circ$, és $EB = E'B$. Másrészt $ABE\triangle \simeq AEE'\triangle$, mert E -ből induló oldalaik egyenlők, továbbá $\angle AEB = 180^\circ - \angle EAB - \angle EBA = 150^\circ$, és $\angle AEB + \angle BEE' = 210^\circ$, tehát $\angle AEE' = 150^\circ$. Eszerint az $ABE'\triangle$ egyenlő szárú és $\angle AE'B = \angle ABE' = \angle ABE + \angle EBE' = 80^\circ$, tehát E' az $ABC\triangle$ köré írt körön van. Így $\angle ECB = \angle E'CB = \angle E'AB = 2\angle EAB = 20^\circ$, amint a feladat állítja.



1. ábra

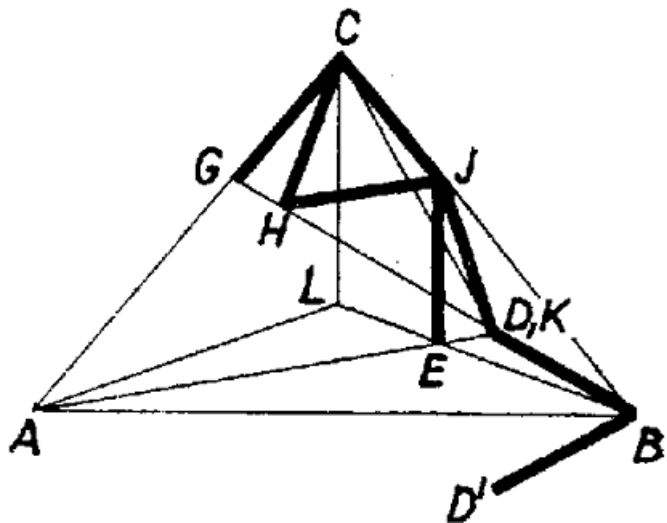
Tükörözzük az AD egyenest AB -re, és messe a képét a CE egyenes F -ben. Ekkor az $ACF\triangle$ egyenlő oldalú, mert A -nál és C -nél 60° -os szöge van, így $FC = AC = BC$. Eszerint a $BCF\triangle$ egyenlő szárú, $\angle CBF = (180^\circ - \angle BCF)/2 = 80^\circ$, és $\angle ABF = 30^\circ = \angle ABD$, vagyis F a BD egyenes AB -re vonatkozó tükörképén is rajta van, tehát azonos D' -nek AB -re való D' tükörképével. Ezért $BF = BD$, a $BDF\triangle$ egyenlő oldalú, D rajta van BF felező merőlegesén. Ugyanez áll C -re is, így CD a BCF egyenlő szárú háromszög szimmetriatengelye, felezi a $\angle BCF = \angle BCE$ szöveget, tehát $\angle BCD = 10^\circ$, ami a feladat első állítása.

Megjegyzések. 1. A D' tükörképből kiindulva belátható, hogy a $BDD'\triangle$ és a $CAD'\triangle$ szabályos, utóbbi azért, mert A -nál 60° -os szöge van és a $CD' > CA = CB$, $CD' < CA$ feltételek ellentmondásra vezetnek. Így $D'AD\triangle \simeq D'CB\triangle$, mindkettő egyenlő szárú, a szárak közt 20° -os szöggel. Másrészt a középponti és kerületi szögek összefüggése alapján belátható, hogy E a D' középpontú, B -n és D -n átmenő körön van. Így $\angle ED'D = 2 \cdot \angle EBD = 20^\circ$, amiből következik, hogy E az AD és CD' egyenesek metszéspontja. Ezekből már következik a feladat mindkét állítása.

2. Mesterkélt, de egyszerűbb az ábra következő származtatása. Legyen a $BCD'\triangle$ -ben $BC = D'C$ és $\angle C = 20^\circ$. Forgassuk ezt el D' körül 60° -kal a DAD' helyzetbe úgy, hogy D a $BCD'\triangle$ belsejében legyen. Ekkor az $ACD'\triangle$ is szabályos; továbbá AD és CD' metszéspontját E -vel jelölve $DD'E$ 20° -os csúcsszögű egyenlő szárú háromszög. Így az $ABC\triangle$ és a D, E pont teljesíti a feladat feltételeit, és nyilvánvalóan teljesülnek az állítások is.

(Tusnádý Gábor)

II. megoldás. Messe BD az AC -t G -ben (2. ábra), ekkor $\angle GBC = 20^\circ$ miatt $\angle BGC = 80^\circ = \angle BCG$, és $\angle GDA = 40^\circ = \angle CAD$ miatt BCG és ADG egyenlő szárú háromszögek, $GB = CA$, és $CG = CA - GA = GB - GD = DB$. Legyen H, K, J a BG , ill. BC száron az a pont, amelyre $CG = CH = HJ = JK$; megmutatjuk, hogy K azonos D -vel. Valóban, így $\angle CHG = 80^\circ$, $\angle GCH = 20^\circ$, $\angle HCJ = \angle HJC = 60^\circ = \angle CHJ$, $\angle JHK = \angle JKH = 40^\circ$, $\angle HJK = 100^\circ$, $\angle KJB = 20^\circ = \angle KBJ$, ekkor pedig $BK = JK = CG = BD$, ami igazolja állításunkat. Mivel még $JC = JH = JD$, és $\angle CJD = 160^\circ$, azért a CJD egyenlő szárú háromszögből $\angle JCD = \angle BCD = 10^\circ$, q. e. d.



2. ábra

Messe az $ABC\triangle$ szimmetriatengelyét a BE egyenes az L pontban. Ekkor AE az $LAB\triangle$ szögfelezője, és $LAB\triangle \sim DBJ\triangle$, így

$$LE : EB = LA : BA = DB : JB = CJ : JB,$$

ezért $JE \parallel CL$. Ebből $EJB\angle = LCB\angle = 40^\circ$, így egyrészt $EJD\angle = 20^\circ$, másrészt $EDJ\angle = EDG\angle + GDJ\angle = 80^\circ$, ennél fogva a $DEJ\triangle$ -ben $DEJ\angle = 80^\circ = EDJ\angle$, tehát $EJ = DJ = CJ$. Mivel még $EJC\angle = 140^\circ$, azért az EJC egyenlő szárú háromszögből $ECJ\angle = 20^\circ$, q. c. d.

Berács József (Győr, Benedek-rendi Czuczor G. g. II. o. t.)

III. megoldás. A két állítást egymástól függetlenül bizonyítjuk. Az elsőhöz elég azt belátni, hogy $DCA\angle = 70^\circ$. Ez igaz, ha $DA = CA$; ezt bizonyítjuk. Messe a BD egyenes a C körül írt $CA = CB$ sugarú kört másodszer M -ben (1. ábra). Ekkor $MCA\angle = 2 \cdot MBA\angle = 60^\circ$, ezért ACM egyenlő oldalú háromszög, továbbá $AMB\angle = ACB\angle / 2 = 40^\circ$. Így pedig $DAM\angle = 100^\circ$, $ADM\angle = 40^\circ = AMD\angle$, és végül $AD = AM = AC$.

A második állításhoz elég azt belátni, hogy CE negyedeli a BCA szöget, vagy ami ugyanaz, felezi a BCN szöget, ahol CN az $ABC\triangle$ szimmetriatengelye. Legyen E tükörképe BC -re E' , CN -re E'' . Ekkor $EE'' \parallel AB$, $BE''E\angle = E''BA\angle = EAB\angle = 10^\circ$, vagyis BE'' felezi az $ABE\angle = 20^\circ$ szöget, és így $EE'' = EB$. Másrészt, mint már láttuk, $EE'' = EB$, ezért $EE'' = EE'$. E a BCN szög mindkét szárától fele ekkora távolságban van, tehát EC valóban felezi a szöget.

Sax Gyula (Budapest, Kölcsey F. g. I. o. t.)

Megjegyzés. $DA = CA$ bizonyításához segítségül vehetjük az AB alap fölé a C -t tartalmazó partján szerkesztett ABC_1 egyenlő oldalú háromszög C_1 csúcsát is. Ekkor $AC_1 = AB$, $C_1AC\angle = 10^\circ = BAD\angle$, $AC_1C\angle = 30^\circ = ABD\angle$, így $ACC_1\triangle \simeq ADB\triangle$, $AC = AD$.

Sax Gyula