

I. megoldás. Az összehasonlítandó két kifejezés K különbsége így alakítható át

$$(1) \quad K = ab - (ad + bc) = b(a - c) - ad = b(a - c) - d(a - c) - cd = \\ = (b - d)(a - c) - cd.$$

Az első szorzat mindegyik tényezője nagyobb, vagy ugyanakkora, mint a második szorzat ugyanannyiadik tényezője, ugyanis a feltevések miatt

$$(2) \quad c + d \leq b, \quad c + d \leq a, \text{ tehát} \\ (2a) \quad (0 \leq) c \leq b - d, \quad (0 \leq) d \leq a - c.$$

Ezek összeszorozásával

$$(3) \quad (0 \leq) cd \leq (b - d)(a - c),$$

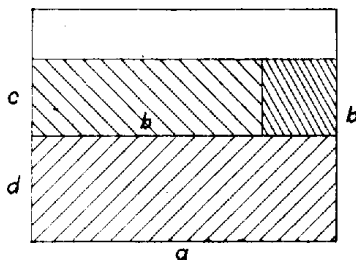
és így $K \geq 0$. Ezt kellett bizonyítanunk.

A vizsgált kifejezések csak akkor egyenlők, ha $K = 0$, vagyis ha (3)-ban egyenlőség áll. Ez pedig csak akkor teljesül, ha (2a)-ban, és így (2)-ben is mindkét helyen egyenlőség áll, vagyis ha $a = b = c + d$.

II. megoldás. Jelöljük a és b nagyobbikát n -nel, kisebbikét k -val, megengedve az $n = k$ esetet is. Ekkor

$$ad + bc \leq nd + nc = n(c + d) \leq n \cdot k = ab.$$

Biró Sándor (Budapest, Radnóti M. gyak. g. II. o. t.)



Megjegyzés. A II. megoldás így szemléltethető, feltéve, hogy $a \geq b$: az a és b oldalú téglalap a oldalával húzzunk párhuzamost d és $c + d$ távolságban. Ezek a téglalapról egy ad és egy $ac \geq bc$ területű téglalapot metszenek le. – Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a felső sáv nem jött létre, mert $b = c + d$, és a középső sávot egészen igénybe vettük, vagyis $a = b$.