

I. megoldás. Képezzük először K első két törtjének összegét. Közös nevezőnek az $N = (a - b)(b - c)(c - a)$ szorzatot véve a számláló így alakítható:

$$S = (a^2 - b^2)(a^3 + b^3) + (b^2 - c^2)(b^3 + c^3) = \\ - (c^5 - a^5) + (c^3 - a^3)b^2 - (c^2 - a^2)b^3.$$

Itt mind a három zárójeles kifejezés osztható $c - a$ -val, tehát S/N egyszerűsíthető $c - a$ -val.

Egyszerűsítés után az első két tag S/N összegének nevezője ugyanaz, mint K harmadik tagjáé, tehát közvetlenül összeadhatók. Számlálói összege így alakítható:

$$-(c^4 + c^3a + c^2a^2 + ca^3 + a^4) + (c^2 + ca + a^2)b^2 - (c + a)b^3 + \\ + (a + c)(a^3 + c^3) = b^2c(a - b) + ab^2(a - b) - c^2(a^2 - b^2) = \\ = (a - b)[b^2c + ab^2 - c^2(a + b)] = (a - b)[bc(b - c) + a(b^2 - c^2)] = \\ = (a - b)(b - c)(bc + ab + ac),$$

ezt osztva a közös nevezővel, a kifejezést

$$K = ab + bc + ca$$

alakban írhatjuk, feltéve, hogy a, b, c közt nincs két egyenlő érték.

Török Bálint (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)

II. megoldás. K -t közös nevezőre hozva S_1/N_1 alakban írhatjuk, ahol

$$S_1 = (a^2 - b^2)(a^3 + b^3) + (b^2 - c^2)(b^3 + c^3) + (c^2 - a^2)(a^3 + c^3),$$

$$N_1 = (a - b)(b - c)(c - a).$$

S_1 -ben b helyébe a -t helyettesítve azonosan 0-t kapunk, tehát a számlálónak tényezője $a - b$. Hasonlóan kapjuk, hogy S_1 osztható $b - c$ -vel, és $c - a$ -val is. Így várható, hogy e három tényező szorzata, azaz N_1 is kiemelhető S_1 -ből, tehát $S_1 = N_1 K_1$, ahol K_1 szimmetrikus polinom, hiszen K is szimmetrikus a változóiban.

Mivel S_1 ben csak ötödfokú tagok szerepelnek, K_1 -ben csak másodfokúak szerepelhetnek,

$$K_1 = \lambda(a^2 + b^2 + c^2) + \mu(ab + bc + ca).$$

a^4b együtthatója S_1 -ben 0, $N_1 K_1$ -ben $-\lambda$, tehát $\lambda = 0$; a^3b^2 együtthatója S_1 -ben -1 , $N_1 K_1$ ben $-\mu$, tehát $\mu = 1$, így $K_1 = ab + bc + ca$.

Beszorzással könnyen ellenőrizhető, hogy valóban $N_1 K_1 = S_1$, tehát $K = K_1$.