

Mindegyik behelyettesítés könnyebbé válik, ha a polinomot $x - 1$ hatványai szerint rendezzük át, meghatározva az új együttthatókat. A

$$P(x) \equiv Q(x - 1) = (x - 1)^3 + a(x - 1)^2 + b(x - 1) + c$$

követelménynek minden x -re teljesülnie kell. x értékét 1-nek, 0-nak és 2-nek választva egyszerű egyenletrendszert kapunk a , b , c -re:

$$\begin{array}{lll} x = 1, & P(1) = Q(0), & -6 = c, \\ x = 0, & P(0) = Q(-1), & -1 = -1 + a - b + c, \\ x = 2, & P(2) = Q(1), & -11 = 1 + a + b + c, \end{array}$$

innen $c = -6$, $a = 0$, $b = -6$, tehát

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 1 \equiv (x - 1)^3 - 6(x - 1) - 6.$$

Most már

$$\begin{aligned} P(x_1) &= P(1 - \sqrt{2}) = Q(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 6 = 4\sqrt{2} - 6, \\ P(x_2) &= Q(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2} - 6; \quad P(x_1) + P(x_2) = -12; \\ P(x_3) &= Q(-2\sqrt{2}) = -4\sqrt{2} - 6, \quad P(x_4) = Q(2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} - 6, \\ P(x_3) + P(x_4) &= -12, \end{aligned}$$

a két összeg valóban egyenlő. – Végül

$$\begin{aligned} P(x_5) &= Q(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) = (\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})^3 - 6(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) - 6 = \\ &= 2 + 6\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{4} + 4 - 6\sqrt[3]{2} - 6\sqrt[3]{4} - 6 = 0, \end{aligned}$$

vagyis a $P(x) = 0$ egyenlet egyik gyöke x_5 .

Békéssy Péter (Budapest, Berzsenyi D. g. I. o. t.)

Megjegyzés. A fenti két összeg egyenlősége bármely a paraméterrel meghatározott $x_1 = 1 - a$, $x_2 = 1 + a$, $x_3 = 1 - 2a$, $x_4 = 1 + 2a$ értéknégyes esetében fennáll.

Bod Judit (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)