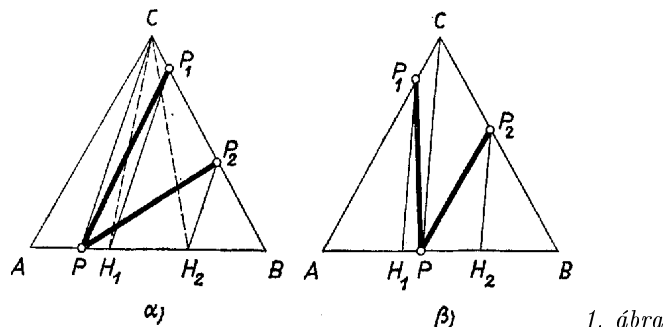


Legyen az adott háromszög  $ABC$ , az adott belső pont az  $AB = a$  oldalon  $P$ , a  $BC$  oldalon  $Q$ . Előírhatjuk, hogy az első vágás  $P$ -ből induljon ki; ennek egyik oldalán 1, a másikon 2 résznek kell lennie, tehát a háromszög  $t$  területét 1:2 arányban kell kettévágnia. Forgassunk egy félegyeneset  $P$  körül a  $PA$  helyzetből kiindulva,  $PC$ -n át a  $PB$  helyzetig és tekintsük a háromszögből a félegyenes két oldalára eső részek területének arányát. Az  $A$ -t tartalmazó rész területe egyre nő, a másiké fogy, így az arány tetszés szerinti kicsiny (pozitív) értéktől tetszés szerinti nagy értékig minden értéket felvesz, és csak egyszer, tehát az  $1/2$  és a  $2/1$  értéket is, így első vágásként a félegyenes két helyzete felel meg. E két helyzet az alábbiak szerint szerkeszthető.

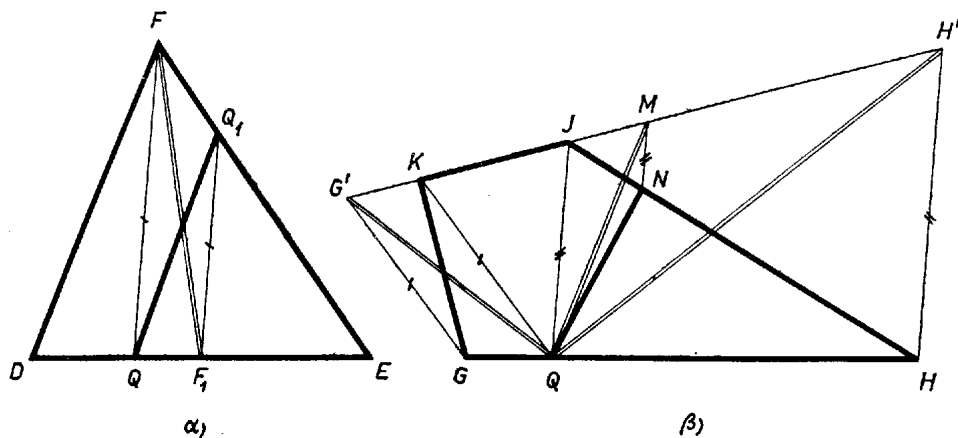


1. ábra

Legyenek az  $AB$  oldal harmadoló pontjai  $H_1, H_2$  úgy, hogy  $AH_1 = H_1H_2 = H_2B$ . Húzzunk párhuzamost  $H_1$ -en és  $H_2$ -n át a  $PC$  egyenessel, és messék ezek az  $ACB$  törött vonaldarabot  $P_1$ -ben, ill.  $P_2$ -ben. Ekkor  $PP_1$  és  $PP_2$  a megfelelő vágások. Legyen ugyanis először  $P$  az  $AB$  oldal egyik szélső harmadán, mondjuk  $AH_1$ -en, akkor  $P_1, P_2$  mindegyike  $C$  és  $B$  között adódik (esetleg  $P_1 = C$ , ha ti.  $P = H_1$ ), mert  $H_1P_1$  és  $H_2P_2$  kiindulópontja  $P$  és  $B$  között van (1. ábra  $\alpha$  része). A  $PBP_2\Delta$  területe  $t/3$ , a  $PBP_1\Delta$ -é pedig  $2t/3$ , mert az előbbi egyenlő a  $H_2BC\Delta$ , az utóbbi a  $H_1BC\Delta$  területével, ezeknek  $ABC$ -vel közös az  $AB$ -re merőleges magasságuk, alapjuk pedig  $a/3$ , ill.  $2a/3$ , és így területük  $t/3$ , ill.  $2t/3$ . Valóban, a  $PBP_i$  és  $H_iBC$  háromszögek ( $i = 1, 2$ )  $H_iBP_i$  része közös, és a  $H_iP_i$  egyenes másik partján levő részeik területe is egyenlő, mert a  $H_iP_i$  alapjuk közös, és erre merőleges magasságuk egyenlő. Így a  $PP_2P_1\Delta$  területe is és az  $APP_1C$  négyszög területe is  $t/3$ .

A  $PBP_2\Delta$ -re adott bizonyításunk akkor is érvényes, ha  $P$  a  $H_1H_2$  szakaszon van, mert  $P_2$  ilyenkor is  $BC$ -n adódik (1.  $\beta$  ábrarész). Ilyen esetben  $P_1$  az  $AC$ -n van, és a  $PAP_1\Delta$  területe a  $H_1AC\Delta$ -ével egyenlő, ez is  $t/3$ .

A talált két vágási lehetőség közül számunkra az lesz megfelelő, amelyik a  $Q$  második kiinduló pontot a kettévágott háromszög nagyobb részébe juttatja. A két vágás közül legalább az egyik ilyen; ha pedig így mindkettő megfelel, akkor  $PP_1$  és  $PP_2$  bármelyikét vehetjük első vágásszakasznak. A kiszemelt vágás a háromszöget egy háromszögre és egy (konvex) négyszögre vágja szét (vagy kivételesen 2 háromszögre, ha ti.  $P$  éppen  $H_1$ -ben vagy  $H_2$ -ben van). Így már csak azt kell megmutatnunk, hogy háromszöget is, négyszöget is lehet két egyenlő részre vágni a kerületének adott pontjából kiinduló egyenes vágással, hiszen  $Q$  kerületi pontja a levágott  $2/3$  résznek.



2. ábra

Legyen  $Q$  a  $DEF \Delta$   $DE$  oldalának pontja. Húzzunk párhuzamost a  $DE$  oldal  $F_1$  felezőpontján át  $QF$ -fel, ez metszi ki a háromszög kerületéből a vágás  $Q_1$  végpontját (2. ábra  $\alpha$  része), mert  $F_1Q_1Q\Delta = F_1Q_1F\Delta$ ,  $QEQ_1\Delta = F_1EF\Delta = DEF \Delta / 2$ .

Legyen  $Q$  a  $GHJK$  négyszög  $GH$  oldalán és messük  $JK$ -t a  $G$ -n átmenő,  $QK$ -val párhuzamos egyenessel  $G'$ -ben, valamint a  $H$ -n átmenő,  $QJ$ -vel párhuzamos egyenessel  $H'$ -ben (2.  $\beta$  ábrarész). A fentiekhez hasonlóan látható, hogy a négyszög területe egyenlő a  $QG'H'\Delta$ -ével, és hogy az utóbbit megfelelzi a  $G'H'$  szakasz  $M$  felezőpontját  $Q$ -val összekötő egyenes vágás, ami egyszersmind a négyszöget is felezi, amennyiben  $M$  a  $JK$  szakaszon adódik.

Az ellenkező esetben válasszuk a betűzést úgy, hogy  $M$  a  $JH'$  szakaszra essék. Ekkor a  $QJKG$  négyszög területe kisebb a  $GHJK$  négyszög területének felénél, mert az utóbbi a  $QMG'\Delta$  területével egyenlő, az előbbi pedig a  $QJG'\Delta$ -ével. Különbségük a  $QMJ\Delta$ . Ezzel egyenlő területet úgy vágatunk le a  $GHJK$  négyszög további részéből, a  $QHJ\Delta$ -ből, hogy az  $M$ -en átmenő,  $QJ$ -vel párhuzamos egyenesnek  $HJ$ -vel való  $N$  metszéspontjába irányítjuk a  $Q$ -ból kiinduló vágást; így ugyanis a  $QNJ\Delta$  területe egyenlő a különbözettel.

Minden lehetséges esetre eljárást adtunk a második vágás végpontjának kijelölésére, a feladatot megoldottuk.

Amennyiben az első vágást  $Q$ -ból indítjuk el, lehetséges, hogy más két vágást kapunk. Ezt a kérdést azonban nem vizsgáljuk, mert a feladat nem írja elő a  $P$ ,  $Q$  pontpárból lehetséges összes vágáspárok előállítását.

Sehol nem használtuk ki az  $ABC\Delta$  egyenlő oldalú voltát, sem  $P$ -nek és  $Q$ -nak  $A$ ,  $B$ ,  $C$ -től, valamint egymástól különböző voltát, így eljárásunk bármely háromszög kerületén bárhogyan választott két kiindulási vágáspont esetén érvényes.

*Koren András* (Budapest, I. István g. II. o. t.)

*Bozóky-Szeszich Ádám* (Budapest, Berzsenyi D. g. II. o. t.)