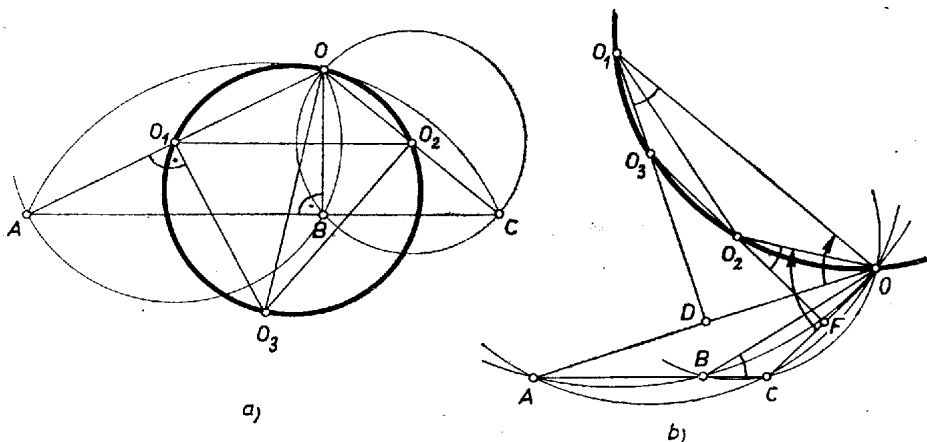


Az $O_1O_2O_3\Delta$ köré írt kör megszerkesztésében az A, B, C csúcsok szerepe felcserélhető, ezért választhatjuk a betűzést úgy, hogy B az AC szakasz pontja, és $CBO \angle \leq OBA \angle$. Megmutatjuk, hogy így az O_1O_2 szakasz O -ból és O_3 -ból vett látószögeinek összege 180° , és hogy az O_1O_2 egyenes szétválasztja O -t és O_3 -at; ebből már következik, hogy $O_1O_3O_2O$ konvex húrnégyszög.

Az O_1O_3 egyenes mindig felező merőlegese az AO szakasznak, mert AO az 1. és 3. kör közös húrja, hasonlóan O_2O_3 merőlegesen felezi CO -t. $CBO \angle = OBA \angle (= 90^\circ)$ esetén O_1 felezi AO -t, O_2 a CO -t, és O_3 az AOC szögtartományban van, mert az $ACO\Delta$ -ben AO -val és CO -val szemben hegyesszög van, így az $OO_1O_3O_2$ négyszögben O_1 -nél és O_2 -nél derékszög van, tehát az állításban szereplő kör az OO_3 szakasz fölé írt Thalész-kör; az $O_1O_3O_2$ és O_1OO_2 szögek merőleges szárú, egymást 180° -ra kiegészítő szögek (1. a ábrarész).



1. ábra

Ugyanez az összefüggés a $CBO \angle < OBA \angle$ esetben is fennáll az $O_1O_3O_2$ és $DOF = AOC$ szögek között (1. b ábrarész). Így ugyanis O_2 és O_3 az OC egyenesnek A -t és B -t tartalmazó pontján van, mert OBC , ill. OAC hegyesszög, és pedig O_3 távolabb van OC -től, mint O_2 , mert $OAC \angle = OBC \angle - BOA \angle < OBC \angle$, tehát az O_3O_2 félegyenes most is OC -nek F felezőpontja felé halad. Másrészt O_1 az OA -nak B -t nem tartalmazó partján van, és az O_3O_1 félegyenes OA -nak D felezőpontja felé irányul vagy része a DO_1 félegyenesnek aszerint, hogy az $OCB \angle \leq 90^\circ$, ill. $OCB \angle > 90^\circ$, mert C kívül van az $AOB\Delta$ köré írt körön, és ezért $O_1C > O_3C$. Ezek szerint O és O_1 az O_2O_3 egyenes ugyanazon oldalán vannak, és O az $O_1O_3O_2$ szögtartomány pontja, amint állítottuk. Így már elég lesz azt belátnunk, hogy az $O_1O_3O_2$ szöget 180° -ra kiegészítő AOC szög egyenlő az O_1OO_2 szöggel.

Ez abból adódik, hogy OO_1 ugyanannyival van elfordulva OA -tól, mint OO_2 az OC -től, és a két forgás iránya mindkét esetben az, ami az OC félegyeneset OB -n át OA -ba viszi. Ez O_2 -nek és O_1 -nek már kimondott helyzetéből adódik. Valóban,

$$\begin{aligned} AOO_1 \angle &= \frac{180^\circ - AO_1O \angle}{2} = \frac{360^\circ - AO_1O \angle}{2} - 90^\circ = ABO \angle - 90^\circ = \\ &= 90^\circ - OBC \angle = \frac{180^\circ - OO_2C \angle}{2} = COO_2 \angle. \end{aligned}$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Apor Zsuzsa (Esztergom, Bottyán J. gépip. t. II. o. t.)